Chapitre :
Probabilités

I. Expérience aléatoire

1. Définitions

Définition Une **expérience aléatoire** est un processus qui peut être répété, dont le résultat n'est pas connu à l'avance, mais dont l'ensemble des résultats possibles est connu.
l'ensemble des résultats possibles, appelé **univers**, est parfois noté U, E ou Ω.
On appelle **issue** un résultat possible. L'univers est donc l'ensemble des issues.

Exemple On lance un dé et on regarde le résultat. L'univers est l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple On lance deux dés et on fait la somme. L'univers est l'ensemble $\{2; 3; \ldots ; 12\}$.

Définition On appelle **événement** tout sous-ensemble (on dit également partie) de l'univers E.
Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue. On peut décrire un événement à l'aide d'une phrase.

Exemple Dans l'expérience aléatoire du jet d'un dé, on peut considérer :
- l'événement « obtenir un 2 ». Il correspond à l'ensemble $\{2\}$, c'est donc un événement élémentaire.
- l'événement « obtenir un nombre pair ». Il correspond à l'ensemble $A = \{2; 4; 6\}$, ce n'est pas un événement élémentaire.

Définition Soit A un événement.
L'**événement contraire** (ou complémentaire) de A, noté $\overline{A}$ et lu « non A » (ou « A barre ») est l'ensemble des issues de E qui ne sont pas dans A.

Exemple L'événement contraire de « obtenir un 2 » est « ne pas obtenir de 2 ».
Il correspond à l'ensemble $\{1; 3; 4; 5; 6\}$.
L'événement contraire de « obtenir un nombre pair » est « obtenir un nombre impair ».
Il correspond à l'ensemble $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$.

Définition On dit de deux événements A et B qu'ils sont **incompatibles** s'ils n'ont pas d'issue en commun, autrement dit si $A \cap B = \emptyset$ (ensemble vide).
Deux événements contraires sont donc en particulier incompatibles.

Exemple Les événements « obtenir un 2 » et « obtenir un nombre impair » sont incompatibles (mais ne sont pas contraires).

▶ **Exercices :** 20,21p340, 22p341, 42-43p343

2. Méthodes de dénombrement pour plusieurs épreuves

Dans certaines expériences aléatoires, on souhaite obtenir plusieurs résultats, en particulier lors de répétition. Par exemple, tirer au hasard plusieurs cartes, lancer plusieurs fois un dé, etc.
Pour compter les issues d'une expérience aléatoire répétée, on peut utiliser parfois un tableau à double entrée ou un arbre.

- Un tableau à double entrée peut être utilisée pour une expérience avec deux épreuves.
- Un arbre est utilisé dans le cas où il y a deux épreuves ou plus.

Voir le manuel page 334 et les exemples pages 335 pour plus de détails.

Remarque Pour les expériences où l'on fait un tirage (choisir une carte, prendre une boule dans une urne, etc.), on distingue :

- le tirage **sans remise**, où l'on ne remet pas l'élément qui a été tiré ;
- le tirage **avec remise**, où l'on remet l'élément qui a été tiré. Dans ce cas, l'expérience est répétée à l'identique, contrairement au cas précédent.

▶ **Exercices :** 44p343, 61,62,64p345

3. Simulation

Pour simuler certaines expériences aléatoires, on peut utiliser un programme informatique, en particulier le langage Python.
Il existe dans Python une librairie, appelée random, qui permet d'obtenir des valeurs aléatoires. Il est nécessaire de l'importer pour pouvoir l'utiliser. Pour cela, on écrit « `from random import *` » en tête du fichier Python.
Les deux fonctions suivantes en particulier peuvent être utiles :

- `randint(1,6)` permet d'obtenir un nombre entier aléatoire entre 1 et 6. Dans ce cas on simule par exemple le lancer d'un dé équilibré.
- `uniform(0,1)` permet d'obtenir un nombre flottant (réel) aléatoire entre 0 et 1.

Si l'on souhaite répéter une expérience aléatoire et compter l'apparition d'une issue particulière, on utilise une boucle `for` pour la répétition et une variable servant de compteur.

Exemple On souhaite lancer 1 000 fois un dé équilibré et compter le nombre d'apparition de la face 5. On peut alors utiliser la fonction suivante :

```python
from random import * # importation des fonctions du module random

def lance_de():
    compteur = 0 # initialisation du compteur
    for i in range(1000): # répétition
        resultat=randint(1,6) # lancer du dé
        if resultat == 5: # si l'on a obtenu 5
            compteur = compteur + 1 # on ajoute 1 au compteur
    return compteur # à la fin on retourne la valeur du compteur
```

La fonction `lance_de()` retourne la valeur de la variable `compteur`, nombre de 5 obtenus lors de 1 000 lancers.

Voir page 331 pour d'autres exemples d'algorithmes.

⊛ **Activité :** 2, question 4 page 328 (lire la question 1 au préalable) (à gauche, on peut cliquer sur le lien « animation » qui permet des simulations de l'expérience dans le navigateur internet)

▶ **Exercices :** 33-36p342 (tous à faire en Python)

II. Loi de probabilité

1. Cas général

Sur l'ensemble $E = \{e_1; \ldots ; e_n\}$, univers de l'expérience aléatoire, on veut pouvoir exprimer la fréquence d'apparition théorique de chaque issue.
On définit alors sur E une fonction de probabilité, notée P, de sorte que :
Pour tout élément e_i de E, $P(e_i) \geq 0$ et la somme des $P(e_i)$ vaut 1 :

$$P(e_1) + \cdots + P(e_n) = 1$$

Définir la fonction P, c'est donner la **loi de probabilité** sur E. Elle est souvent donnée sous forme de tableau, associant à chaque issue sa probabilité.

Définition La probabilité d'un événement A de E est la somme des probabilités des issues de A.

Exemple La probabilité d'obtenir un nombre pair avec un jet de dé à six faces est :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

On déduit des définitions ci-dessus que pour tout événement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Propriété Soit A un événement de E. Alors :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Ainsi, si l'on connaît la probabilité d'un événement A, on obtient celle de l'événement contraire $\overline{A}$ par la formule $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Définition On dit qu'un événement est **impossible** si sa probabilité vaut 0. C'est le cas de l'ensemble vide $\emptyset$
On dit qu'un événement est **certain** si sa probabilité vaut 1. C'est le cas de l'univers.

Dans certains cas, liés à une étude statistique d'une expérience, on utilise la propriété suivante, dite **loi des grands nombres**, pour définir un modèle probabiliste :

Propriété Soit n un entier naturel non nul. On considère une expérience aléatoire et un échantillon de taille n de cette expérience. Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée d'une issue est proche de la probabilité de cette issue.
Dans ce cas, on peut alors utiliser le modèle probabiliste qui donne pour chaque issue une probabilité égale à la fréquence observée sur l'échantillon.

▶ **Exercices :** 23,25-27p341, 49,50p343, 52,53p344

2. Cas particulier : équiprobabilité

Dans certains cas, on estime que les probabilités de toutes les issues sont les mêmes. On dit que les issues sont **équiprobables**. C'est le cas lorsque l'on considère que le dé est « **équilibré** », ou bien que l'on tire (une carte, une boule dans une urne) « **au hasard** ».
On dit alors que la loi est **équirépartie**.

Si l'univers E contient n éléments, et si la loi est équirépartie, alors toute issue e a la probabilité $P(e) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple pour revenir à l'exemple précédent, si le dé est équilibré, la loi est équirépartie. Donc :

$$P(\text{« obtenir un nombre pair »}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Propriété On peut simplifier le calcul des probabilités dans le cas d'équiprobabilité. Soit A un événement de E dont la loi est équirépartie. Alors :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E}$$

Exemple Dans notre exemple, l'événement « obtenir un nombre pair » représente l'ensemble $\{2; 4; 6\}$ qui contient 3 éléments. L'ensemble E contient lui 6 éléments.
On a donc $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

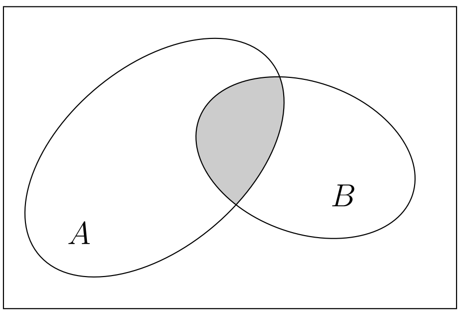
▶ **Exercices :** 30-32p341, 65,66p345

III. Union et intersection d'événements

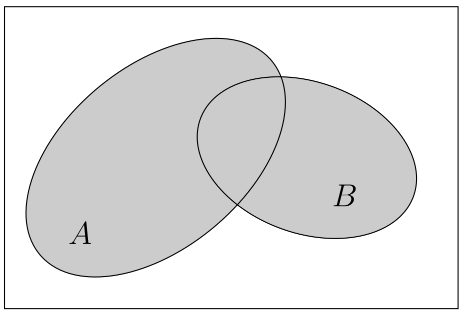
Définition Soit A et B deux événements. On définit les événements :

- « A et B », noté $A \cap B$ et prononcé aussi A inter(section) B, l'événement contenant les issues qui sont à la fois dans A et dans B.
- « A ou B », noté $A \cup B$ et prononcé aussi A union B, l'événement contenant les issues qui sont dans A ou dans B (éventuellement les deux).

On peut visualiser chacun des deux événements à l'aide d'un diagramme (dit de Venn) :



$A \cap B$

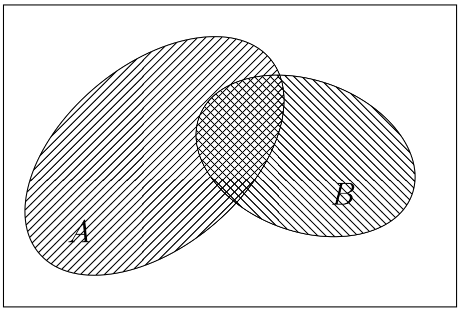


$A \cup B$

Propriété Quels que soient les événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration : Un dessin suffit à comprendre cette formule : en ajoutant $P(A)$ et $P(B)$, on compte deux fois $P(A \cap B)$, il faut donc la soustraire une fois.



▶ **Exercices :** 24,28,29p341, 57-59p344, 60p345, 67p346