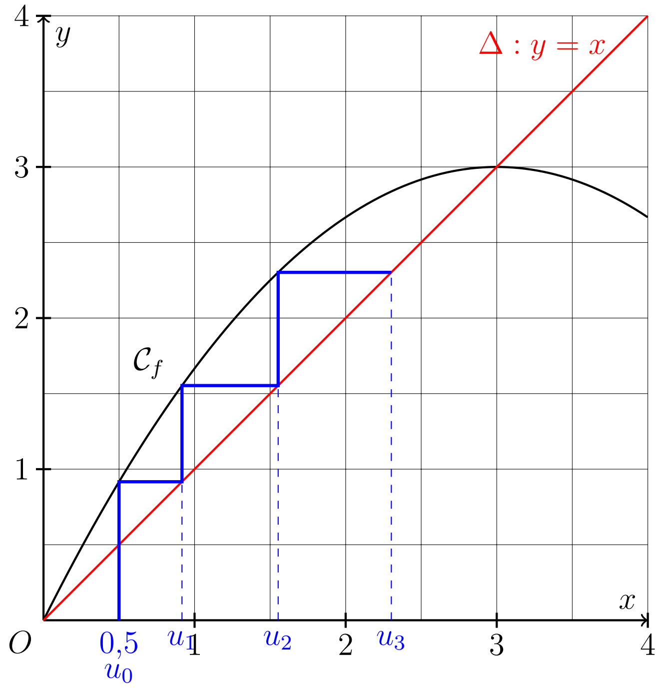
Devoir surveillé n°4
Correction

Exercice 1

1. Les trois premiers termes de la suite u sont u_0, u_1 et u_2. Sans précision, il faut donner les valeurs exactes.
   $u_0 = 0{,}5$, $u_1 = -\dfrac{1}{3}(0{,}5)^2 + 2(0{,}5) = -\dfrac{1}{12} + 1 = \dfrac{11}{12} \simeq 0{,}9167$
   $u_2 = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{11}{12}\right)^2 + 2 \times \dfrac{11}{12} = -\dfrac{121}{3 \times 144} + \dfrac{22}{12} = \dfrac{671}{432} \simeq 1{,}553241$
2. La courbe est complétée.
3. On observe que u semble croissante.
4. La limite de u semble être égale à 3 (au niveau de l'intersection entre la courbe et la droite).



Exercice 2

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6 - 5n^3 = -\infty$ (attention aux signes).
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \dfrac{2}{n} = 2$.

Exercice 3

1. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 15n = +\infty$,
   on a une forme « $-\infty + \infty$ » qui est indéterminée.
2. On a : $n^2\left(-2 + \dfrac{15}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right) = -2n^2 + \dfrac{15n^2}{n} + \dfrac{3n^2}{n^2} = -2n^2 + 15n + 3 = u_n$.
3. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{15}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} -2 + \dfrac{15}{n} + \dfrac{3}{n^2} = -2$.
   Ensuite, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
   Comme la limite est infinie, u ne converge pas (elle diverge).

Exercice 4

Soit $u_n = \dfrac{9}{3^n} = 9 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Alors u est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 9$.

Par suite, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 9 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{27}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Comme $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{27}{2}(1 - 0) = 13{,}5$.

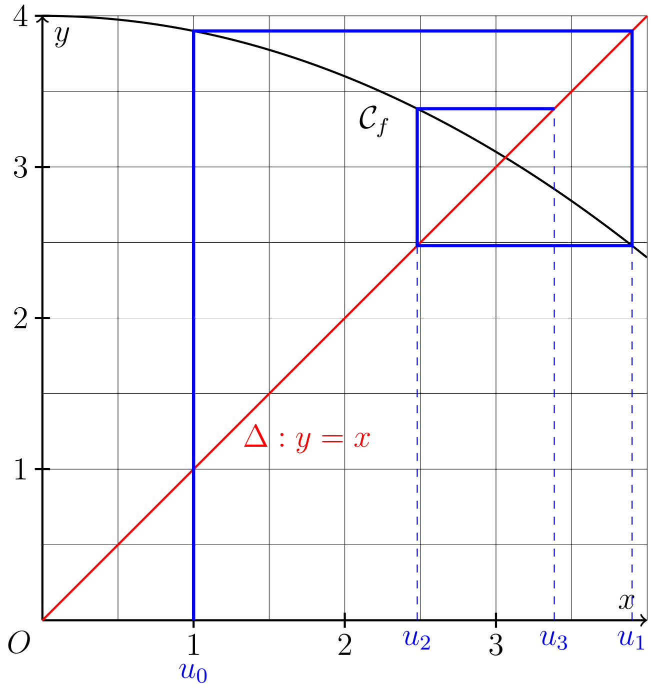
Exercice 5
On a :

$$\begin{aligned}-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1 &\Leftrightarrow -2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2\\ &\Leftrightarrow 1 \leqslant 2\sin(n)+3 \leqslant 5\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{n+1}\end{aligned}$$

($n+1$ est strictement positif, donc on peut diviser, sans changer de sens).
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n+1} = 0$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Devoir surveillé n°4
Correction

Exercice 1



1. Les trois premiers termes de la suite u sont u_0, u_1 et u_2. Sans précision, il faut donner les valeurs exactes.
   $u_0 = 1$, $u_1 = 4 - 0{,}1{u_0}^2 = 3{,}9$
   $u_2 = 4 - 0{,}1 \times 3{,}9^2 = 2{,}479$
2. La courbe est complétée.
   On utilise la droite Δ d'équation $y = x$.
3. On observe que u est non monotone.
   Les valeurs sont en effet alternativement en dessous puis au dessus de 3,.. (l'abscisse du point d'intersection).
4. La limite de u semble être légèrement supérieure à 3 (au niveau de l'intersection entre la courbe et la droite).

Exercice 2

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -6 + 2n^2 = +\infty$ (⚠ calculs : 6 est soustrait de l'infini).
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{n} = 1$.

Exercice 3

1. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 15 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + 1 = +\infty$,
   on a une forme « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » qui est indéterminée.
2. On a : $u_n = \dfrac{\frac{n-15}{n}}{\frac{2n+1}{n}} = \dfrac{\frac{n}{n} - \frac{15}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \dfrac{1 - \frac{15}{n}}{2 + \frac{1}{n}}$.
3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{15}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2}$.
   Comme la limite est finie, u converge (vers $\frac{1}{2}$).

Exercice 4

On a $v_n = 3 \times 1{,}01^n$.

On sait d'après le cours que $S_n = v_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3 \times \dfrac{1 - 1{,}01^{n+1}}{1 - 1{,}01} = \dfrac{3}{-0{,}01}(1 - 1{,}01^{n+1})$.

Comme $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - 1{,}01^{n+1} = -\infty$,
puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (attention aux signes).

Exercice 5

On a :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant \cos(n+3) \leqslant 1 &\Leftrightarrow -5 \leqslant 5\cos(n+3) \leqslant 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{n+1} \end{aligned}$$

($n+1$ est strictement positif, donc on peut diviser, sans changer de sens).

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-5}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} = 0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.