Chapitre :
Calculs d'aires

∽

⊛ **Activité :** Consolider les bases page 128

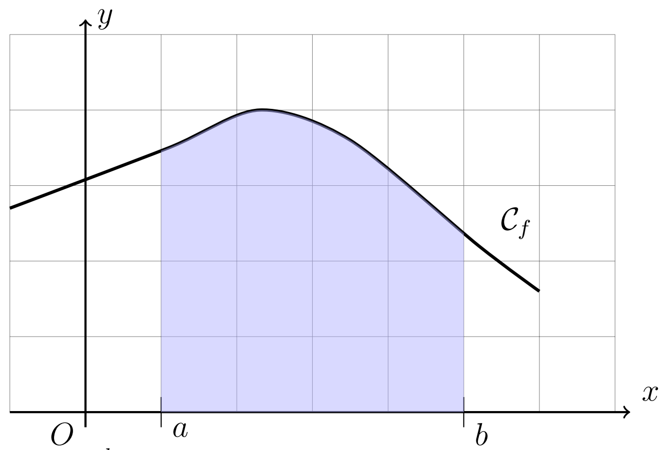
I. Intégrale d'une fonction continue positive

Dans cette partie, toutes les fonctions sont supposées continues et positives.
On se place dans un repère orthogonal $(0; I; J)$.
On appelle unité d'aire (u.a.) l'aire du rectangle dont trois des sommets sont O, I et J.

Définition Soit a et b deux réels, f une fonction (continue et positive) sur l'intervalle $[a; b]$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire (mesurée en unités d'aires) de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.



$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface colorée

Remarque Dans le cas particulier où $a = b$, on a $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.
En effet, l'aire en question est celle d'un segment, donc elle vaut 0.

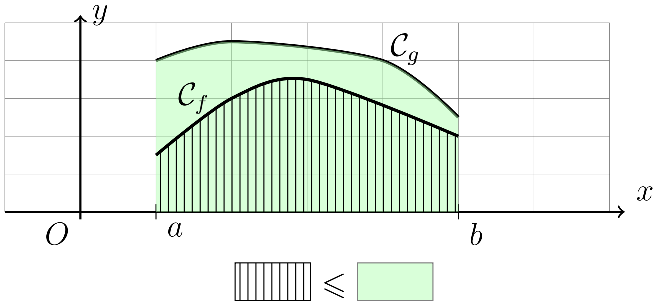
Remarque Le nom de la variable dans l'intégrale n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

Le symbole de l'intégrale fait penser à un 'S'; on peut voir cela comme la somme d'aires de rectangles de hauteur $f(t)$ et de largeur presque nulle (dt) qui approximent l'aire sous la courbe (voir la méthode des rectangles page 134).

Propriété **(Comparaison)** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Illustration :

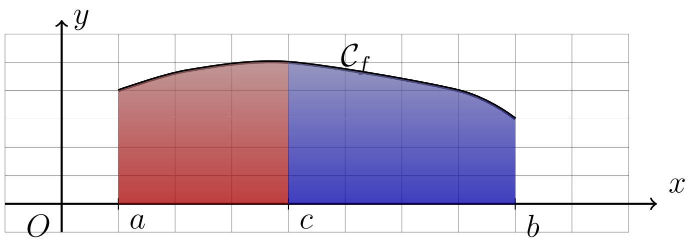


Propriété **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $c \in [a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

On appelle cette relation la relation de Chasles (elle fait penser à la relation de Chasles vue en seconde pour les vecteurs).

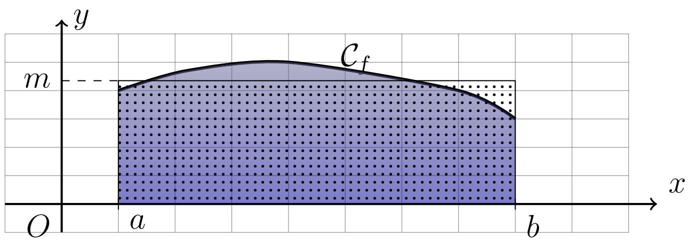
Cette propriété est utile dans le cas où l'on souhaite calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux.
Illustration graphique :



Définition **(Valeur moyenne)** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
La valeur moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On explique cette définition par l'interprétation graphique suivante :
m est la hauteur d'un rectangle de largeur $b-a$ qui a la même aire que celle sous la courbe de f.

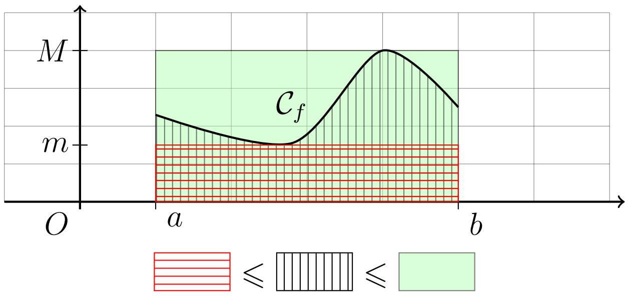


La zone bleue et le rectangle rempli de points ont la même aire. Autrement dit, $m \times (b-a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
On a donc bien $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété **(encadrement d'une intégrale)**
Si il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

Illustration :



Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction quelconque peut s'avérer très complexe sans propriété supplémentaire.
On peut voir les situations 1, 2 et 3 des pages 128 et 129, qui donnent quelques méthodes anciennes.
Quand les surfaces se découpent en demi-cercles, triangles, trapèzes, on peut s'en sortir sans trop de problème : voir page 131.

▶ **Exercices :** 48p140, 1p131

II. Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
On considère la fonction F définie sur $[a; b]$ par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété La fonction F est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f : $F' = f$.
Autrement dit, F est une primitive de f.
D'autre part,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Démonstration : Voir le manuel page 132.
En fait, plus généralement :

Propriété Soit F une primitive de f, donc telle que $F' = f$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Il suffit donc de trouver une fonction F, primitive de f, pour calculer l'intégrale.
Plus généralement encore, on définit l'intégrale d'une fonction non nécessairement positive sur un intervalle $[a; b]$ par le biais d'une primitive et de la formule obtenue précédemment :

Définition Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit F une primitive de f.
On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Propriété **(Linéarité)**
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et soit α un réel. Alors :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Ces deux propriétés font que l'on dit que l'intégrale est linéaire (comme les fonctions du même nom).

▶ **Exercices :** 50,59,60p140 (calculs simples et estimations de moyenne)

▶ **Exercices :** 4-7p133, 51-58p140 (calculs d'intégrales)

▶ **Exercices :** 8,9p133, 64p141 (utilisation de la linéarité)

▶ **Exercices :** 65-68p141 (aires de surfaces entre des courbes)