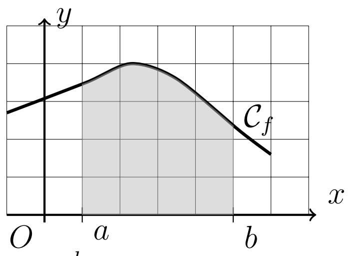
Chapitre :
Calculs d'aires

1. Intégrale d'une fonction continue positive

Définition Soit a et b deux réels, f une fonction (continue et positive) sur l'intervalle $[a;b]$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.



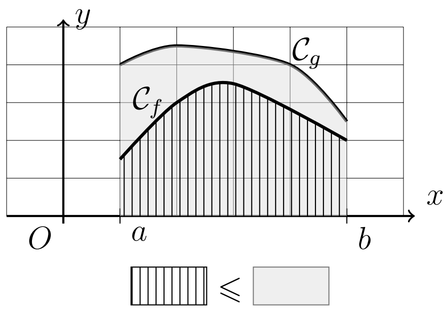
$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface colorée

Remarque Dans le cas particulier où $a=b$, on a $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.
En effet, l'aire en question est celle d'un segment, donc elle vaut 0.

Remarque Le nom de la variable dans l'intégrale n'a pas d'importance : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

Propriété **(Comparaison)** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$,
alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

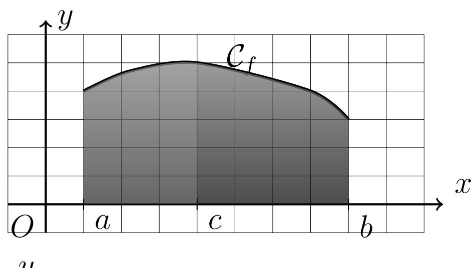
Voir l'illustration ci-contre.



Propriété **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $c \in [a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

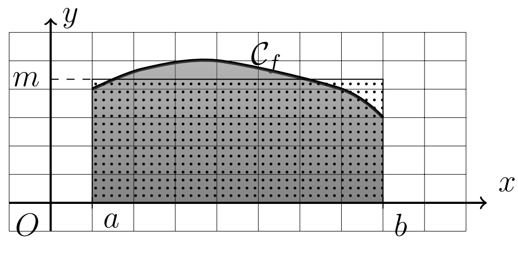
Voir l'illustration graphique ci-contre.



Définition **(Valeur moyenne)** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
La valeur moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On explique cette définition par l'interprétation graphique suivante :
m est la hauteur d'un rectangle de largeur $b-a$ qui a la même aire que celle sous la courbe de f.

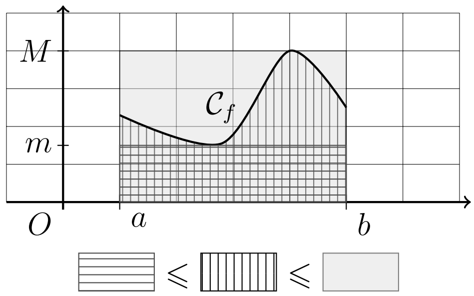


La zone bleue et le rectangle rempli de points ont la même aire. Autrement dit, $m \times (b-a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
On a donc bien $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété (encadrement d'une intégrale)
Si il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

Voir l'illustration ci-contre.



2. Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
On considère la fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété La fonction F est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f : $F' = f$.
Autrement dit, F est une primitive de f.
D'autre part,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Démonstration : Voir le manuel page 132.
En fait, plus généralement :

Propriété Soit F une primitive de f, donc telle que $F' = f$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Il suffit donc de trouver une fonction F, primitive de f, pour calculer l'intégrale.
Plus généralement encore, on définit l'intégrale d'une fonction non nécessairement positive sur un intervalle $[a;b]$ par le biais d'une primitive et de la formule obtenue précédemment :

Définition Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit F une primitive de f.
On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Propriété (Linéarité)
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et soit α un réel. Alors :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Ces deux propriétés font que l'on dit que l'intégrale est linéaire (comme les fonctions du même nom).