Codage binaire des entiers relatifs

But : Nous avons déjà vu comment écrire en binaire des nombres entiers naturels en base 10.
Il s'agissait jusque-là d'une traduction mathématique de notations dans des bases différentes.
On veut maintenant **coder** également les nombres entiers relatifs, c'est à dire éventuellement négatifs.
Il ne s'agit plus ici d'en donner l'écriture en binaire (où il suffirait d'utiliser un signe), mais bien de coder, c'est à dire de n'utiliser que les caractères 0 et 1, et aucun autre signe.

1. (a) Quelles sont les idées possibles ? En trouver au moins une et mettre en évidence son côté arbitraire (le fait que l'on pourrait choisir autre chose).
   (b) En particulier, avec le codage choisi, quel est le codage de 4 ? Et celui de -2 ?

   On aimerait que le codage ait la propriété suivante, qui serait bien pratique :

   La somme (en binaire) des codes de deux nombres est le code de la somme des deux nombres

2. Est-ce que le codage proposé précédemment satisfait cette propriété ?
   Tester en particulier avec les deux nombres 4 et -2.

   Nous allons donner un moyen d'obtenir cette propriété. Pour cela, on commence par donner une limite au nombre de bits pour coder les nombres, l'idée étant que si pour coder, ou après calcul, on obtient une écriture en binaire dont le nombre de bits dépasse la limite choisie, on « coupe » ce qui dépasse (côté bits de poids fort, autrement dit à gauche, en ne gardant que ce qui est à droite).

3. Pour commencer, on se limite à 4 bits.
   (a) Donner l'écriture en binaire des nombres (en base 10) 15 et 1, en les écrivant tous les deux sur 4 bits.
   (b) Faire la somme (binaire) des deux écritures obtenues, et respecter la limite des 4 bits pour le résultat.
   Qu'obtient-on ?

   On peut considérer que, sur 4 bits, 15 et 1 sont opposés. Ainsi, on considérera que sur 4 bits, l'écriture binaire de 15 sera le codage pour le nombre -1, opposé de 1.

   (c) Quel est, toujours sur 4 bits, l'opposé de $(0010)_2$?
   (d) Même question pour $(0101)_2$.

4. Plus généralement, quelle que soit la limite n de bits donnée, comment obtenir l'opposé d'un nombre en binaire ? Dégager deux étapes simples.

On appelle complément à 2^n ou, plus simplement, par abus de langage, complément à 2, le nombre obtenu en faisant cette opération.

5. Sur 8 bits, donner le complément à 2 des écritures suivantes :

   (a) 01001100 (b) 11001101

On aboutit à l'idée du **codage par la méthode du complément à 2** suivante :
Une fois fixée la limite n du nombre de bits du codage, soit a un nombre entier relatif.

- Si a est positif, alors le codage est simplement l'écriture en binaire de a, où l'on ajoute autant de 0 que nécessaire en tête pour avoir n bits.
- Si a est négatif, alors le codage de a est le complément à 2 de l'écriture binaire de sa valeur absolue sur n bits.

6. Donner le codage sur 8 bits des nombres suivants (en base 10) :

   (a) 4 (b) -5 (c) -64

On ne peut bien sûr pas coder tous les nombres sur n bits. On fait en sorte que tous les codes ayant un bit de poids fort égal à 0 soient ceux de nombres positifs. Le plus grand nombre positif est donc $(01\ldots1)_2$, c'est à dire $2^{n-1}-1$, dont le codage est donc sa propre écriture en base 2. Toutes les écritures commençant par un 1 seront des codages de nombres négatifs. On a vu en particulier que $1\ldots1$ est en fait le codage de -1, le plus grand nombre négatif.
Le plus petit nombre négatif est celui qui est codé par $(10\ldots0)$ c'est à dire -2^{n-1} (vérifier !).

Pour décoder, on applique la méthode suivante :

- Si le code commence par un 0, alors c'est le code d'un nombre positif. Ce code est simplement l'écriture en binaire du nombre cherché. Il suffit donc de traduire cette écriture binaire en une écriture en base 10 à l'aide de la formule déjà connue.
- Si le code commence par un 1, alors c'est le code d'un nombre négatif. On applique le complément à 2 sur le code. L'écriture obtenue est alors l'écriture en binaire de l'opposé (positif) du nombre cherché. Il suffit donc de traduire cette écriture binaire en une écriture en base 10 à l'aide de la formule déjà connue.

7. Déterminer les nombres dont les codes par complément à 2 sur 8 bits sont les suivants :

   (a) 00110011 (c) 10101001
   (b) 10001100 (d) 01010110

8. Vérifier qu'en faisant la somme binaire des codages de 4 et -5 obtenus précédemment, on obtient le codage de -1.

On admet qu'avec le codage par la méthode du complément à 2 la propriété donnée au début est toujours satisfaite.