Chapitre :
Nombres et calculs

Ce chapitre contient également la redécouverte des instructions algorithmiques ainsi que leur traduction en Python.

I. Ensembles de nombres

L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls : 0 ; 1 ; 2 ; ...
L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers naturels auxquels on ajoute les entiers négatifs : ... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ...
L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a appartient à $\mathbb{Z}$ et b appartient à $\mathbb{N}$ en étant non nul.
L'ensemble des **nombres décimaux** est l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où n appartient à $\mathbb{N}$.
L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres étudiés jusqu'au début du lycée.

Définition Le symbole $\in$ se lit « appartient à » (ou « est un élément de »). Il se dit d'un nombre dans un ensemble. Sa négation $\notin$ se lit « n'appartient pas à ».
Le symbole $\subset$ se lit « est inclus dans » (ou « est un sous-ensemble de »). Il se dit d'un ensemble dans un ensemble. Sa négation $\not\subset$ se lit « n'est pas inclus dans ».

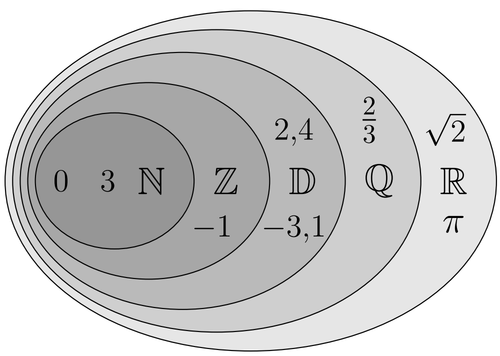
Exemples

- $2 \in \mathbb{N}$
- $-3 \in \mathbb{Z}$
- $-4 \notin \mathbb{N}$
- $0{,}523 \in \mathbb{D}$
- $-\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

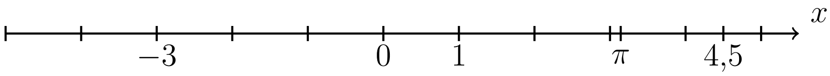
On a la suite d'inclusion suivante : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$ et π.
Nous démontrerons plus tard que $\sqrt{2}$ ne l'est pas.

Exemple Voici une visualisation des inclusions, avec quelques nombres placés :



Propriété Tout nombre réel est l'abscisse d'un point sur la droite numérique, autrement dit sur une droite orientée et graduée.



Propriété Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration : On suppose, par contradiction, que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Alors il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Autrement dit, $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, donc $10^n = 3a$ (par produit en croix).
On en déduit que 10^n est un multiple de 3, autrement dit que 10^n est divisible par 3. Or, pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut que la somme de ses chiffres soit divisible par 3. De plus, la somme des chiffres du nombre 10^n est 1, qui n'est pas divisible par 3.
Comme on obtient une contradiction, on en déduit que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

▶ **Exercices :** (nombres rationnels et décimaux) 34,35,36,37,38p65

▶ **Exercices :** (voir 4p57 : fractions irréductibles) 102,103,104p69

Algorithmique : types et affectation livre page 16, Python page 18

▶ **Exercices :** 15-18p30, 23-27p30-31, 54,55,57,58p33 (affectation et types)

▶ **Exercices :** 29-32p31 (Python)

II. Arithmétique

En arithmétique, on ne manipule que des nombres entiers.

Définition Soit a et b deux nombres entiers relatifs. Le nombre a est un diviseur de b lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.
On dit alors que b est un multiple de a, que a divise b, que b est divisible par a.

Exemple 5 est un diviseur de 15 car $15 = 3 \times 5$.

Théorème Soit $a \in \mathbb{Z}$. Si b et b' sont des multiples de a, alors $b + b'$ est un multiple de a.

Démonstration : Il suffit d'écrire ce que tout cela signifie par définition.

Définition Un nombre entier $z \in \mathbb{Z}$ est :

- **pair** lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2 \times k$;
- **impair** lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2 \times k + 1$.

En particulier, un nombre pair est un multiple de 2.

Exemple Le nombre 15 est impair car $15 = 2 \times 7 + 1$, et 12 est un nombre pair car $12 = 2 \times 6$.

▶ **Exercices :** 15,16,17,19,20,21,23p64

▶ **Exercices :** 22p64, 26,27,28p65

▶ **Exercices :** 47,52,55,62,63p66

Algorithmique : Fonctions en Python. Voir livre page 20 puis page 21.
À savoir : une **indentation** est un espace de longue fixée qui est ajouté à partir de la marge et qui permet une meilleure lecture d'un algorithme, en mettant en évidence des blocs d'instruction (plus les blocs sont imbriqués, plus l'indentation est grande). En Python, elle est nécessaire à la plupart des structures algorithmiques.
À savoir également : certains modèles de calculatrice récents, en particulier la Numworks, permettent d'écrire et d'exécuter du code Python.

► **Exercices :** 33,34,37p31 (éventuellement 35,36)

Propriété Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors a^2 est impair si et seulement si a est impair.
De manière équivalente, a^2 est pair si et seulement si a est pair.

Démonstration : Voir le livre page 54 (nécessite de connaître les identités remarquables).
Nous pouvons maintenant démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel :
Pour faire cela, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut alors écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, la fraction étant irréductible, autrement dit p et q n'ayant pas d'autre diviseur commun que 1.
En élevant au carré, on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$.
On en déduit que p^2 est un nombre pair. Mais alors d'après la propriété précédente, p est pair. Ainsi, on peut écrire p sous la forme $p = 2p'$. On en déduit alors que $p^2 = (2p')^2 = 4p'^2$, donc $4p'^2 = 2q^2$. Par suite, en divisant par 2 des deux côtés, on obtient $2p'^2 = q^2$.
Mais alors comme précédemment on en déduit que q est pair. Ainsi on a démontré que p et q sont tous les deux pairs, autrement dit divisibles par 2. Or nous avions pris une écriture irréductible de $\sqrt{2}$, ce qui impliquait que p et q n'avaient que le nombre 1 comme diviseur commun.
Il y a donc une contradiction. On en déduit que notre première hypothèse est fausse, autrement dit que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel : il est irrationnel.

► **Exercices :** 73-77 p67

Définition Un entier naturel non nul est dit premier s'il possède deux (et seulement deux) diviseurs positifs distincts, à savoir 1 et lui-même.

Exemple Les plus petits entiers naturels premiers sont 2, 3, 5, 7, 11.

Remarque Le nombre 1 n'est pas premier car 1 ne possède qu'un seul diviseur positif : 1 (qui est lui-même).

► **Exercices :** 29,30,31,32,33p65

Algorithmique : Instruction conditionnelle ; Lecture de la page 22.

► **Exercices :** 38,39p31

Exercice 1
Écrire un algorithme en Python qui demande un nombre et affiche, selon son cas, qu'il est pair ou impair.

III. Règles de calcul

1. Racine carrée

Définition Soit a un nombre réel positif. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif dont le carré est égal à a.
Autrement dit, quel que soit $a \geqslant 0$, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{9} = 3$.

Propriété Soit a et b deux nombres positifs. Alors :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
- Si a et b sont non nuls, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Propriété Quel que soit le nombre réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$ (la valeur absolue de a).
Cela signifie que : $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

▶ **Exercices :** 15-18pp98-99, 59-63p101

2. Fractions

Rappel Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur.
Pour cela, on peut utiliser la règle suivante :
quel que soit les réels a, b et c avec b et c non nuls,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

Ensuite, on applique la règle suivante :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Autrement dit, on ajoute les numérateurs et on garde le même dénominateur.

Exemples Quand un des dénominateurs est un multiple de l'autre, on fait comme cela :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{5}{6} &= \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{5}{6} \\
&= \frac{2}{6} + \frac{5}{6} && \text{les deux fractions sont au même dénominateur} \\
&= \frac{2+5}{6} && \text{on ajoute les numérateurs ; le numérateur reste identique} \\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

On recherche un multiple commun aux dénominateur, dans le pire cas c'est le produit des dénominateur, comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}\frac{5}{3}+\frac{7}{2}&=\frac{5\times 2}{3\times 2}+\frac{7\times 3}{2\times 3}\\&=\frac{10}{6}+\frac{21}{6}\\&=\frac{31}{6}\end{aligned}$$

La soustraction se fait avec la même règle.

Rappel Pour multiplier deux fractions, on applique la règle :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Exemple On a $\frac{5}{4}\times\frac{7}{4}=\frac{5\times 7}{4\times 4}=\frac{35}{16}$

Rappel Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Exemple On a $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{2}}=\frac{5}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{5\times 2}{4\times 7}=\frac{5\times 2}{2\times 2\times 7}=\frac{5}{2\times 7}=\frac{5}{14}$.

Voici des règles qui découlent de celles vues plus haut, à connaître :

$$a\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{c}\qquad\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$$

Exemple On a $\frac{5}{\frac{2}{3}}=5\times\frac{3}{2}=\frac{5\times 3}{2}=\frac{15}{2}$.

D'autre part, un signe « - » devant une fraction est un -1 en facteur, en particulier du numérateur. Autrement dit :

$$-\frac{c+d}{b}=\frac{-(c+d)}{b}=\frac{-c-d}{b}\qquad\text{et ainsi,}\qquad\frac{a}{b}-\frac{c+d}{b}=\frac{a-(c+d)}{b}$$

► **Exercices :** 7-10p98, 37-39,41-45p100

3. puissances

Définition Soit a un nombre réel. Alors $a^2=a\times a$.
Pour tout entier $n\geqslant 0$, a^n est égal au produit répété n fois de a par lui-même. Autrement dit,

$$a^n=\underbrace{a\times\cdots\times a}_{n\text{ facteurs}}$$

Deux cas particuliers à connaître : $a^0=1$ et $a^1=a$.
Enfin, pour tout entier $n\geqslant 1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Exemples On a $2^4=2\times 2\times 2\times 2=16$.
On a $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

Propriété Quels que soient le réel a et les entiers m et n,

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{b^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m\times n}$$

Remarquer que dans ces formules on a le même nombre avec des exposants différents.
De plus, soit en plus b un réel. Alors :

$$(a\times b)^n = a^n \times b^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b\neq 0)$$

Remarquer que dans ces formules l'exposant est le même pour des nombres différents.

▶ **Exercices :** 11,12,14p98, 47-52p100

Algorithmique : Boucle Pour (bornée / non conditionnelle). Voir page 24, exemple page 25

▶ **Exercices :** 43-47p32

---

4. Identités remarquables, développement et factorisation

Propriété Soit a et b deux nombres réels. Alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ces trois formules sont appelées identités remarquables, et sont à connaître par cœur.

Pour des exemples et plus de précision, voir le livre page 90.

Définition
- Développer, c'est transformer un produit en somme.
- Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Ainsi, utiliser les identités remarquables de la gauche vers la droite c'est développer, et les utiliser de la droite vers la gauche c'est factoriser.

Pour factoriser et développer, il existe d'autres formules :

$$k(a+b) = ka + kb \qquad \text{(simple distributivité)}$$
$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \qquad \text{(double distributivité)}$$

Même chose : si on va de gauche à droite on développe, si on va de droite à gauche on factorise.

Exemples Développer :
- $3(2x+7) = 3\times 2x + 3\times 7 = 6x + 21$
- $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x\times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$
- $(2x+3)(x-2) = (2x)\times x + (2x)\times(-2) + 3\times x + 3\times(-2) = 2x^2 - 4x + 3x - 6 = 2x^2 - x - 6$

▶ **Exercices :** 21,22p99, 86-88,91-93p103

Méthode Pour factoriser, on cherche généralement un **facteur commun**, autrement dit une expression (un nombre) qui se retrouve en facteur dans chaque terme de la somme. S'il n'y en a pas, on cherche à observer (et à mettre en évidence) une identité remarquable.

Exemples Factoriser :
- $3x^2 - 2x = 3x\times x - 2\times x = (3x-2)x$ (factorisation par x, commun aux deux termes)

- $3(x+2)+(x+2)(x-5)=(x+2)(3+(x-5))=(x+2)(x-2)$ (factorisation par $(x+2)$)
- $4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x-3)(2x+3)$ (identité remarquable qu'il faut mettre en évidence)

▶ **Exercices :** 23,24p99, 95,96,99,102-104p103

Algorithmique : Boucle Tant que (non bornée / conditionnelle). Voir page 24, exemple page 25

▶ **Exercices :** 48-51p32

IV. Intervalles et valeur absolue

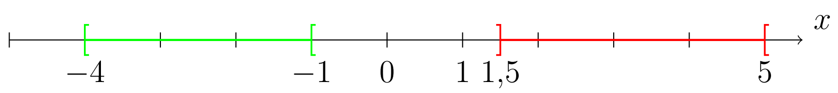
⊛ **Activité :** 3p53

Définition Un intervalle est un ensemble de nombres réels situés entre deux valeurs. On l'écrit avec deux nombres entourés par des crochets.
Soit a et b deux nombres réels.

- $]a;b[$ est l'ensemble des nombres x tels que $a < x < b$ (a et b sont exclus). On dit que cet intervalle est **ouvert**.
- $[a;b]$ est l'ensemble des nombres x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ (a et b sont inclus). On dit que cet intervalle est **fermé**.
- Il existe aussi les intervalles $[a;b[$ ou $]a;b]$ (dits semi-ouverts).
- L'intervalle $]a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty;b]$ est l'ensemble de tous les nombres x tels que $x \leqslant b$.

Le sens des crochets permet de signifier que le nombre est **compris** dans l'intervalle ou **exclu** de l'intervalle.
On peut donner un nom à un intervalle sous la forme d'une lettre majuscule, comme par exemple $I = [2;3[$.

L'infini est toujours exclu : ce n'est pas un nombre réel, un nombre réel ne vaut jamais l'infini.



Représentation des intervalles
$[-4;-1[$ (semi-ouvert) et $]1{,}5;5[$ (ouvert).
On a $\pi \in]1{,}5;5[$ car $1{,}5 < \pi < 5$, $-4 \in [-4;-1[$ mais $-1 \notin [-4;-1[$.

► **Exercices :** 41,42,43p65, 133p70, 134 à 141p71

Définition Soit I et J deux intervalles.

- L'**union** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J. On la note $I \cup J$.
- L'**intersection** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J. On la note $I \cap J$.

Exemples

- Intersection de $[3;6]$ et $[5;7]$
- Union de $]-2;3[$ et $]3;5[$.

► **Exercices :** 161-165p72

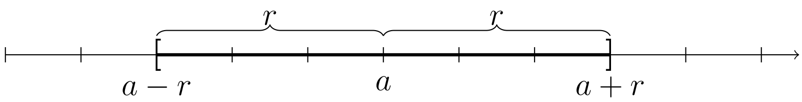
⊛ **Activité :** 4p53

Définition Soit a et b deux nombres réels. Alors la **distance** entre a et b est la distance entre les deux points A et B ayant pour abscisses respectives a et b sur la droite des réels. Si $a > b$ elle vaut $a - b$, sinon elle vaut $b - a$.
On note cette distance de la manière suivante : $|a - b|$.

Définition Soit x un nombre réel. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est la distance entre x et 0 sur la droite des réels.
On a alors $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

► **Exercices :** 154,155,156p71

Propriété Soit a et r deux réels avec $r > 0$.
Alors l'intervalle $[a-r; a+r]$ est l'ensemble des nombres x tels que $|x-a| \leqslant r$.
Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres dont la distance à a est inférieure à r.
Voici une représentation de cet intervalle :



On remarque que a est au milieu ou au « centre » de l'intervalle $[a-r; a+r]$:
Le nombre r peut alors être vu comme le « rayon » de l'intervalle.
Tous les nombres x de l'intervalle sont à une distance du milieu a inférieure au rayon r.

Exemple L'intervalle de centre $a = 1$ et de rayon $r = 3$ est : $[a-r, a+r] = [1-3; 1+3] = [-2; 4]$.
On a alors : $x \in [-2; 4] \Leftrightarrow |x-a| \leqslant r \Leftrightarrow |x-1| \leqslant 3$.

► **Exercices :** 146,147p71, 151,152p71

V. Équations et inéquations

1. Équations

Résoudre une équation d'inconnue x signifie déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vraie. On appelle **ensemble de solutions** l'ensemble de ces valeurs, que l'on note souvent $\mathcal{S}$.
Deux équations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.
La méthode principale consiste à isoler l'inconnue x pour en déduire sa valeur.
Pour résoudre une équation, on applique à chaque étape la même opération sur les deux membres de l'équation, autrement dit de chaque côté de l'égalité. Le plus souvent, les opérations que l'on effectue sont :

- Ajouter ou soustraire une valeur
- Multiplier ou diviser par une valeur non nulle

Exemple Soit à résoudre l'équation $-2x + 7 = -5x + 16$:

$$\begin{aligned} -2x+7=-5x+16 \Leftrightarrow\ & -2x+7+5x=-5x+16+5x && (+5x) \\ \Leftrightarrow\ & 3x+7=16 && \text{(simplification)} \\ \Leftrightarrow\ & 3x=16-7=9 && (-7) \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{9}{3}=3 && (\div 3) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{3\}$.

► **Exercices :** fiche d'exercices
Il existe une règle particulière à connaître, la règle du produit nul :

Propriété Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Autrement dit : Soient A et B deux réels. $A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple L'équation $(x+5)(2-x) = 0$ équivaut à $x+5 = 0$ ou $2-x = 0$.
On obtient alors $x = -5$ ou $x = 2$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{-5; 2\}$.

Pour un quotient nul, la règle est la suivante :

Propriété A et B deux réels. $\dfrac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$ et $B \neq 0$.
Ainsi, il s'agit de résoudre $A = 0$ et de vérifier que pour les solutions obtenues, $B \neq 0$.

▶ **Exercices :** 29,30,31p99, 117,118,124p104

Enfin, une propriété parfois utile :

Propriété Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $x^2 = a$ possède :
- deux solutions si $a > 0$, à savoir $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$;
- une seule solution si $a = 0$, à savoir $x = 0$;
- aucune solution si $a < 0$. Dans ce cas, on note $\mathcal{S} = \emptyset$.

★ **Approfondissement :** 123p104, 125,126,131,132p105

2. Inéquations

⊛ **Activité :** 4p85
Résoudre une inéquation se fait presque selon les mêmes règles que pour une équation. Cependant, multiplier ou diviser par un nombre (strictement) négatif change le sens de l'inégalité.
L'ensemble de solution sera souvent un intervalle ou une union d'intervalles.

Exemples

$$\begin{aligned} 3x + 7 < 16 &\Leftrightarrow 3x < 16 - 7 = 9 && (-7) \\ &\Leftrightarrow x < \frac{9}{3} = 3 && (\div 3 > 0) \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est $\mathcal{S} =]-\infty; 3[$.
Mais :

$$\begin{aligned} 2 - 3x \leqslant 11 &\Leftrightarrow -3x \leqslant 11 - 2 = 9 && (-2) \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{9}{-3} = -3 && (\div(-3) < 0) \end{aligned}$$

L'ensemble de solutions est $[-3; +\infty[$.

▶ **Exercices :** 35,33,32,34p99, 136,137,138,139p105