

Chapitre :

Fonctions



I. Généralités

1. Rappels

Définition Soit \mathcal{D} une partie de \mathbb{R} (le plus souvent un intervalle ou une union d'intervalles). Définir une fonction f sur \mathcal{D} c'est associer à tout nombre $x \in \mathcal{D}$ un **unique** nombre réel $f(x)$. On dit que \mathcal{D} est l'ensemble de définition de f , on le note parfois \mathcal{D}_f . On dit que $f(x)$ est l'**image** de x (par f). Pour tout x de \mathcal{D} , l'image de x est donc unique.

Exemple On peut définir une fonction à l'aide d'une expression littérale (qui utilise la lettre x , appelée variable). Soit par exemple f , la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. C'est la fonction qui à tout nombre positif associe sa racine carrée. On note $f : x \mapsto \sqrt{x}$. L'image de 4 par la fonction f est $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} . Soit y un nombre réel. Un **antécédent** de y pour la fonction f est un nombre x tel que $f(x) = y$.

Remarque Un antécédent est un « x » (alors que l'image est un « y » ou « $f(x)$ »). Chercher un antécédent, c'est donc chercher un « x » ; cela revient à résoudre une équation.

Exemple Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Chercher un antécédent de 4 par f c'est chercher les nombres x tels que $f(x) = 4$. On remplace $f(x)$ par son expression, puis on résout cette équation. Ici, l'équation est $x^2 = 4$. Elle a deux solutions : 2 et -2 . Ainsi, -2 et 2 sont les antécédents de 4 pour la fonction f . Le nombre -4 n'a pas d'antécédent par f car pour tout nombre réel, $f(x) = x^2 \geq 0$: x^2 ne peut pas être négatif.

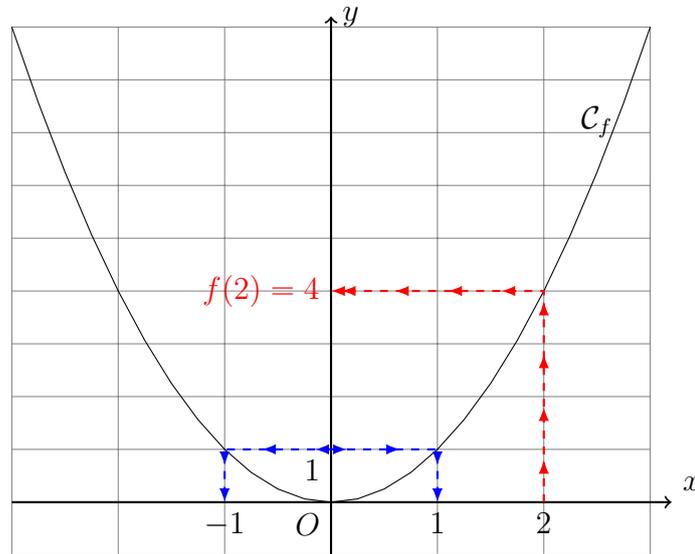
Remarque l'image d'un nombre est unique, mais un nombre peut avoir aucun, un seul ou plusieurs antécédents.

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} . La **représentation graphique** de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de \mathcal{D} . On note parfois \mathcal{C} ou \mathcal{C}_f cette courbe. On associe cette courbe à l'équation $y = f(x)$ (y est l'ordonnée, x l'abscisse).

Pour construire une représentation graphique d'une fonction f , il faut dresser un **tableau de valeurs** de la fonction f , c'est à dire calculer l'image $f(x)$ de plusieurs nombres x de \mathcal{D} .

Exemple Soit $f : x \mapsto x^2$ sur $[-3; 3]$. On peut obtenir un tableau de valeur avec la calculatrice :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



2 a pour image 4 par f : $f(2) = 4$.

1 a pour antécédents -1 et 1 par f : $f(-1) = f(1) = 1$.

⚠ Une lecture graphique des images (et des antécédents) ne donne que des valeurs approchées.

► **Exercices** : 88,89p232 (tableaux de valeurs et points d'une courbe) puis fiche d'exercices

2. Résolutions graphiques

Méthode Soit f une fonction définie sur un ensemble D , soit k un nombre réel. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer les antécédents de k par f . Pour cela :

- On trace une droite parallèle à l'axe des abscisses passant par les points d'ordonnée k ;
- On détermine les points d'intersection entre \mathcal{C}_f et la droite ;
- On trace des segments parallèles à l'axe des ordonnées depuis les points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses pour déterminer les valeurs x des abscisses des points d'intersections. Ces valeurs sont les solutions de l'équation.

Méthode Pour une inéquation de la forme $f(x) \leq k$, on fait les mêmes deux premières étapes. Ensuite, on détermine les abscisses x pour lesquelles la courbe \mathcal{C}_f est située en dessous de la droite. En général il s'agit d'intervalles, voire d'unions d'intervalles. Voir page 220 un exemple.

Méthode Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D . Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ revient à déterminer les valeurs de x qui ont la même image par f et par g . Pour cela :

- On détermine les points d'intersection entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ;
- On trace des segments parallèles à l'axe des ordonnées depuis ces points d'intersection jusqu'à l'axe des abscisses pour lire les valeurs x des abscisses des points d'intersection. Ces valeurs sont les solutions de l'équation.

⚠ Ne pas oublier de tracer les traits de lecture graphique dans un devoir, même si on ne les trace pas sur une courbe tracée sur le manuel.

► **Exercices** : 12,16p228, 24,29p229, 91p232, 95-98p233

Algorithmique :

► **Exercice** : 100p233 ; tableau de valeurs d'une fonction

3. Variations de fonctions

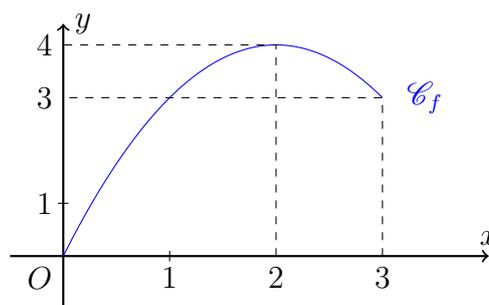
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est **croissante** sur I lorsque : si x augmente, alors $f(x)$ augmente.
- On dit que f est **décroissante** sur I lorsque : si x augmente, alors $f(x)$ diminue.
- On dit qu'une fonction est **monotone** si elle ne change pas de sens de variation.

On peut indiquer les variations d'une fonction à l'aide d'un tableau de variations :

x	0	2	3
variations de f	↗ 4 ↘		3

Tableau de variation



Courbe représentative

► **Exercices** : 17,19-21p256, 22,25p257, 34-39p258

Définition Le **maximum** d'une fonction f est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$.

Le **minimum** d'une fonction f est la plus petite des valeurs prises par $f(x)$.

Un **extremum** est un nombre qui est soit un maximum, soit un minimum.

Exemple Dans l'exemple précédent, le minimum est 0 et le maximum est 4.

Le minimum est atteint en $x = 0$, le maximum est atteint en $x = 2$.

► **Exercices** : 27,28p257, 52,53p259, 54-56p260

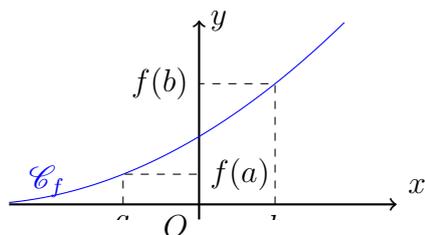
Voici des définitions plus rigoureuses pour les variations et les extremums :

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

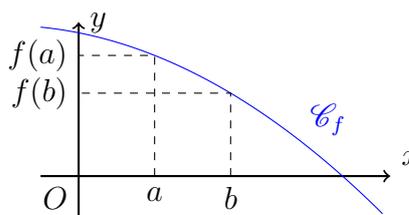
On dit que f est croissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.

On dit que f est décroissante sur I si quels que soient a et b dans I tels que $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

Autrement dit, une fonction croissante conserve le sens de l'inégalité, alors qu'une fonction décroissante change le sens de l'inégalité.



Fonction croissante
 $a < b$ et $f(a) \leq f(b)$



Fonction décroissante
 $a < b$ et $f(a) \geq f(b)$

Si les inégalités entre les images de $f(a)$ et $f(b)$ sont toujours strictes, on dit que f est strictement croissante (ou décroissante).

► Exercices : 23,24,26p257

4. Parité

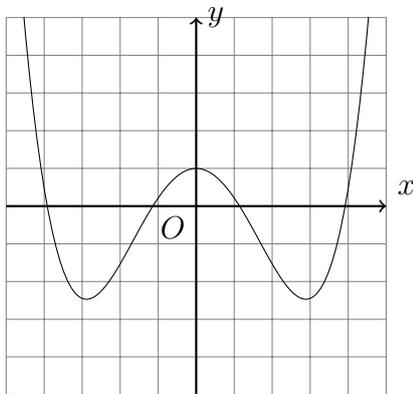
Définition (Parité) Soit f une fonction définie sur un intervalle I centrée en 0. On dit que :

- f est paire si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si, pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

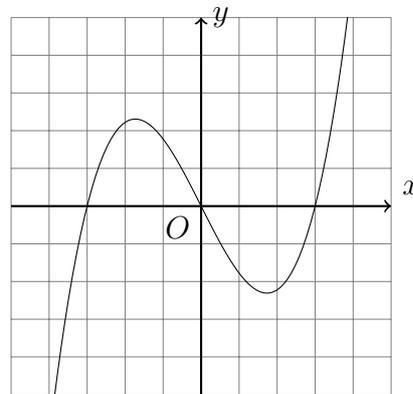
Propriété

- f est paire si et seulement si \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Illustration graphique :



Fonction paire



Fonction impaire

► Exercices : 42,43p258

II. Fonctions affines et droites

1. Définitions et propriétés

Définition Une fonction affine est une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

Lorsque $b = 0$, f est une fonction **linéaire** ($f(x) = ax$).

Lorsque $a = 0$, f est une fonction **constante** ($f(x) = b$).

Propriété La fonction affine f est représentée par une droite.

On écrit que la droite a pour équation $y = ax + b$.

Autrement dit, tous les points $M(x; y)$ tels que $y = ax + b$ sont situés sur une droite.

Exemple Soit $f : x \mapsto -2x + 3$.

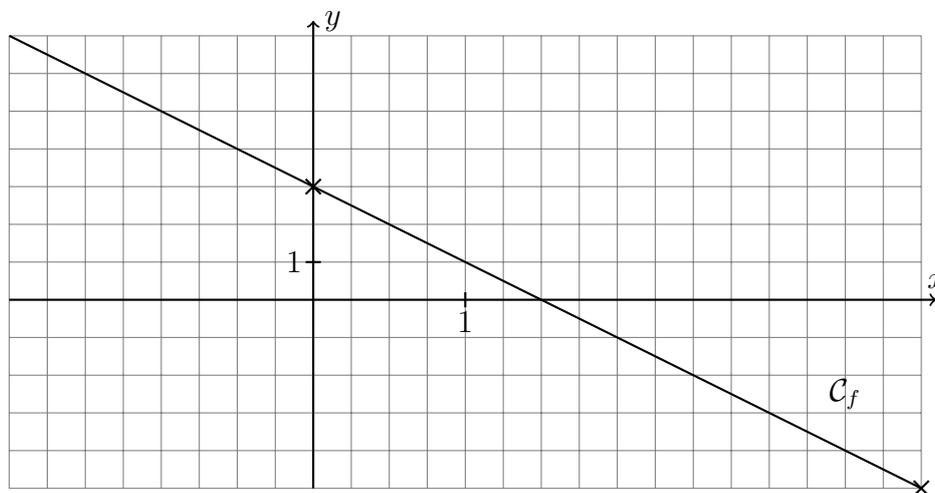
Pour tracer la représentation graphique de f , qui est une droite puisque f est une fonction affine, il suffit de déterminer deux points de cette droite.

Pour cela, on choisit deux valeurs de x , puis on détermine les images $y = f(x)$. Par exemple :

Si $x = 0$, on a $f(0) = 3$, donc on obtient le point de coordonnées $(0; 3)$.

Si $x = 4$, on a $f(4) = -2 \times 4 + 3 = -8 + 3 = -5$, on obtient donc le point de coordonnées $(4; -5)$.

On place alors les deux points dans un repère, puis la droite passant par ces deux points.



Définition Le nombre a est appelé **coefficient directeur**.

Le nombre b est l'**ordonnée à l'origine** puisque $f(0) = b$.

⚠ Le terme de « coefficient directeur » n'a de sens que pour une fonction affine (en fait plus rigoureusement pour la droite qui la représente).

Propriété Soit $f : x \mapsto ax + b$.

- Si $a > 0$, alors f est croissante.
- Si $a < 0$, alors f est décroissante.

Exemple Soit $g : x \mapsto \frac{-2x + 5}{4}$.

La fonction g est affine. En effet, $g(x) = \frac{-2}{4}x + \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

Le coefficient directeur est $a = -\frac{1}{2}$, donc négatif. Ainsi, g est décroissante.

► **Exercices** : fiche d'exercices (de 1 à 5)

2. Étude de signe d'une expression affine

Méthode Pour étudier le signe d'une expression de la forme $ax+b$, on résout par exemple $ax+b \geq 0$. Autrement dit on cherche les valeurs de x pour lesquelles l'expression est **positive** (supérieure à 0). Ensuite on établit un tableau de signes en fonction du résultat obtenu.

Exemple On souhaite étudier le signe de $-3x + 15$:

$$\begin{aligned} -3x + 15 \geq 0 &\Leftrightarrow -3x \geq -15 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{-15}{-3} \quad (\triangle \text{ division par } -3 < 0 \Rightarrow \text{on change de sens}) \\ &\Leftrightarrow x \leq 5 \end{aligned}$$

Par conséquent $-3x + 15$ est positive si et seulement si x est inférieur à 5.

Le **tableau de signes** est alors le suivant :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
Signe de $-3x + 15$	+	0	-

► **Exercices** : fiche d'exercices (de 6 à 8)

★ **Approfondissement** : fiche d'exercices (9 à 14)

III. Autres Fonctions de référence

L'ensemble des fonctions qui sont données ici sont à connaître, en particulier leur représentation graphique.

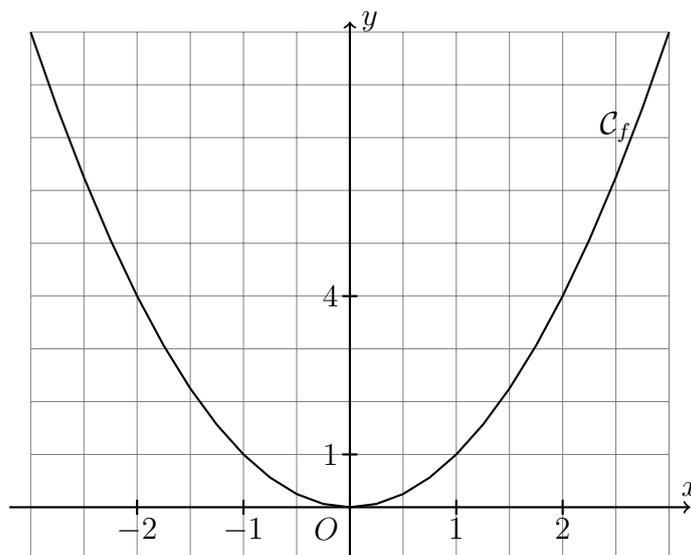
1. Fonction carré

Définition La fonction carrée est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Propriété La fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$ puis strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet pour minimum 0 en $x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f			

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, parce que f est paire ($f(-x) = f(x)$).

Définition On appelle **parabole** la courbe représentative de la fonction carré. Son extremum est appelé le **sommet** de la parabole. Les parties de courbe qui partent du sommet sont appelées **branches** de la parabole.

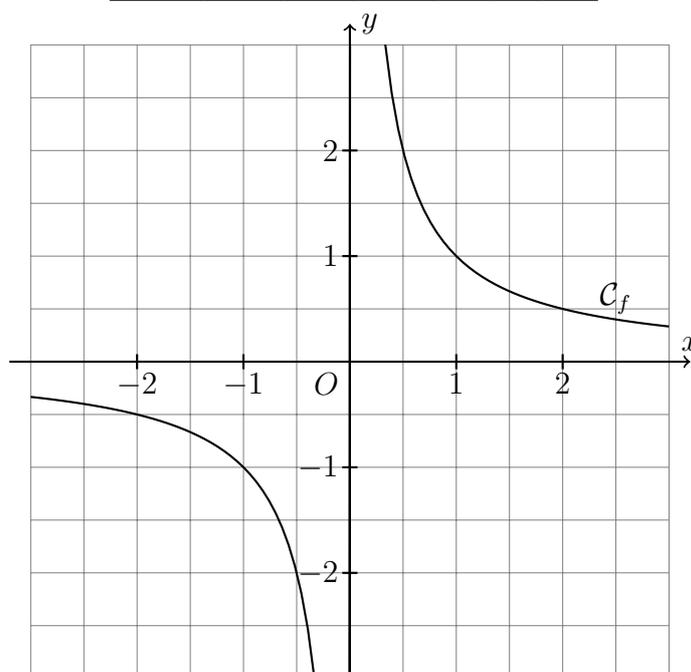
2. Fonction inverse

Définition La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty; 0[$ et encore décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f	↘		↘

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$



La courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère car f est impaire ($f(-x) = -f(x)$).

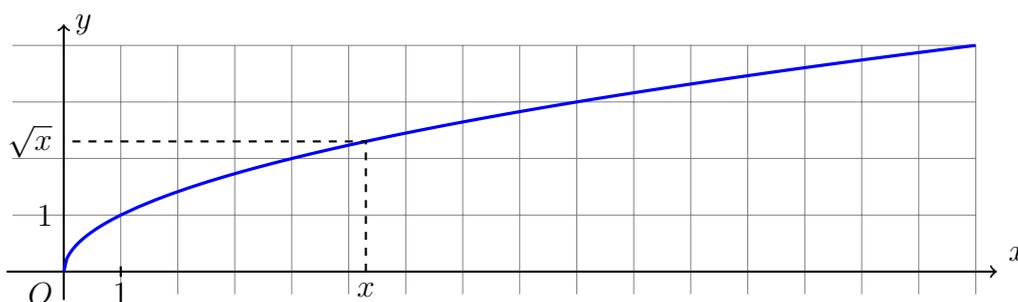
Définition On appelle la courbe représentative de la fonction inverse une **hyperbole**.

3. Fonction racine carrée

Rappel La racine carrée d'un nombre positif x est le nombre positif dont le carré est x . On note \sqrt{x} la racine carrée de x . On a donc par définition $(\sqrt{x})^2 = x$.

Définition La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$.

Sa courbe représentative est la suivante :



Remarque il s'agit d'une branche de parabole « couchée » (x étant le carré de \sqrt{x}).

Propriété | La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Autrement dit on a le tableau de variation suivant :

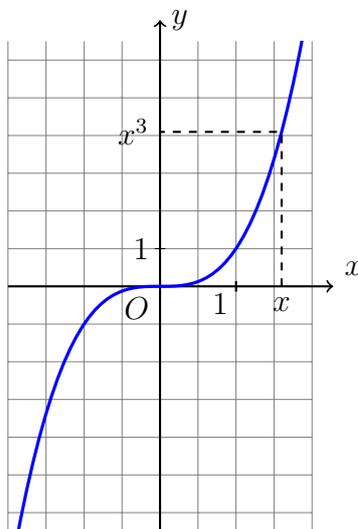
x	0	$+\infty$
\sqrt{x}	0	\nearrow

Cela signifie par définition que pour tous réels positifs a et b tels que $0 \leq a \leq b$, alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

4. Fonction cube

Définition | La fonction cube est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^3$.

La fonction cube est impaire ($f(-x) = -f(x)$) donc l'origine O est un centre de symétrie pour sa courbe représentative :



Propriété | La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	\nearrow	0	\nearrow

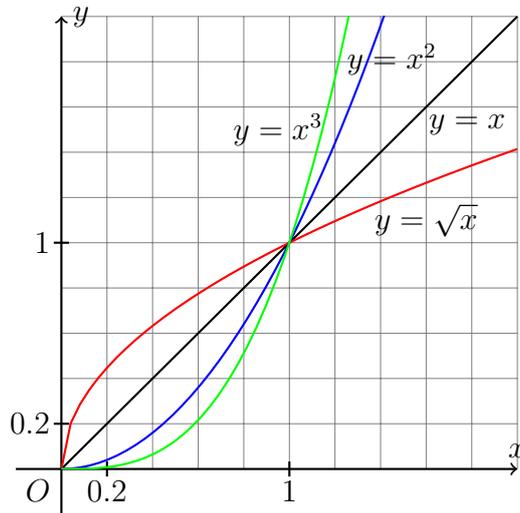
5. Applications

Propriété | On considère l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution.
- si $a = 0$, l'équation a pour unique solution $x = 0$.
- si $a > 0$, l'équation a deux solutions : $a = \sqrt{a}$ et $a = -\sqrt{a}$.

Propriété | (Comparaison des courbes sur $[0; +\infty[$)

Observons sur un même repère les courbes représentatives des fonctions de références (sauf la fonction inverse), avec celle de la fonction i définie par $i(x) = x$:



Cette représentation permet d'observer les propriétés suivantes :

- Si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
- L'égalité $x = x^2 = x^3$ a lieu pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

D'autre part, concernant la racine carrée :

- Si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$
- Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$.
- L'égalité $x = \sqrt{x}$ a lieu pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

On peut observer également que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- **Exercices** : (fonction carré) 31,34,35p230
- **Exercices** : (fonction cube) 30,33,37p230
- **Exercices** : (fonction inverse) 68,73,74p231
- **Exercices** : (fonction racine carrée) 69,72p231

6. Équations de droites

a. Équation réduite

Nous avons vu plus haut que la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite, dont on a noté l'équation $y = ax + b$.

Ainsi, une équation de la forme $y = ax + b$ est l'équation d'une droite.

Pour éviter des confusions qui pourraient survenir plus tard, dans cette partie, au lieu d'utiliser les lettres a et b , nous utiliserons les lettres m et p .

Autrement dit, nous noterons $y = mx + p$ l'équation d'une droite.

Cependant, toutes les droites n'ont pas une équation de cette forme.

Propriété | Toute droite du plan a une équation de la forme :

- soit $y = mx + p$ où m et p sont des réels ;
Le nombre m est le **coefficient directeur**, on dit aussi que c'est la **pente** de la droite, et p est l'**ordonnée à l'origine**.
On appelle une équation de droite de cette forme une équation **réduite** (on verra pourquoi dans une section plus bas).
- soit $x = k$, où k est un réel.

Dans le second cas, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées (ensemble des points dont l'abscisse x vaut k , l'ordonnée y étant quelconque).

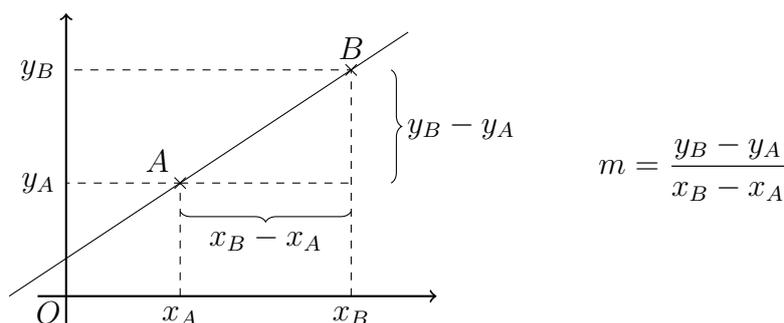
La propriété suivante permet de trouver le coefficient directeur (la pente) d'une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées), connaissant les coordonnées de deux points de la droite :

Propriété | Soit \mathcal{D} une droite d'équation $y = mx + p$.

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de \mathcal{D} . Alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Graphiquement, on a la chose suivante :



Une fois que l'on connaît le coefficient directeur, il ne reste plus qu'à trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine, que l'on obtient en utilisant un des deux points connus appartenant à la droite.

Exemple Soit $A(-2; 1)$ et $B(4; 2)$. On veut déterminer l'équation de la droite (AB) .

Comme $x_A \neq x_B$, l'équation n'est pas de la forme $x = k$, mais de la forme $y = mx + p$.

D'après la propriété, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{4 - (-2)} = \frac{1}{6}$.

Ainsi, l'équation de (AB) est de la forme $y = \frac{1}{6}x + p$.

Pour déterminer p , on utilise le fait que par exemple $B \in (AB)$ (on pourrait faire de même avec A). Ainsi, les coordonnées de B satisfont l'équation :

$$\begin{aligned} y_B = \frac{1}{6}x_B + p &\Leftrightarrow 2 = \frac{1}{6} \times 4 + p \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{4}{6} + p \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{2}{3} + p \\ &\Leftrightarrow p = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Finalement, $(AB) : y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$

► **Exercices** : 78-81p195, 73-77p195, 93p196

Propriété | Soit \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

- Les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes si et seulement si $m \neq m'$.

► **Exercices** : 36,38,39p193, 130p198

Lorsque l'on sait que deux droites sont sécantes, on peut vouloir déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. C'est l'objet de la section plus bas sur les systèmes de deux équations.

Méthode Pour démontrer que trois points A , B et C sont alignés, on peut chercher à démontrer que (AB) et (AC) sont parallèles. Dans ce cas, comme elles ont un point commun (le point A), alors elles sont nécessairement confondues, et les points A , B et C sont bien alignés.

Exemple Soit $A(6;0)$, $B(0;4)$ et $C(3;2)$.

Le coefficient directeur de (AB) est : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 0}{0 - 6} = -\frac{2}{3}$.

Celui de (AC) est : $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2 - 0}{3 - 6} = -\frac{2}{3}$.

Les coefficients directeurs sont égaux, donc (AB) et (AC) sont parallèles, et A , B et C sont alignés.

► **Exercices** : 103-105p197

b. Équation cartésienne

Cette partie nécessite d'avoir vu la colinéarité des vecteurs et la notion de déterminant.

⊗ **Activité** : 1 page 180

Définition On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) tout vecteur non nul ayant la même direction que (d) .

Propriété | Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (c'est là qu'il ne faut pas confondre a et b avec les coefficients des fonctions affines), appelée **équation cartésienne** de la droite.

Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de cette droite.

Réciproquement, pour tous réels a , b et c tels que $(a; b) \neq (0; 0)$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite.

La démonstration de cette propriété, au programme, est disponible dans le manuel à la page 182.

Remarques On peut retrouver les deux types d'équations donnés plus haut :

- Si $b = 0$ (et donc $a \neq 0$), l'équation est alors $ax + c = 0$, donc $x = \frac{-c}{a}$.

En notant $k = \frac{-c}{a}$, on retrouve une équation de la forme $x = k$.

- Si $b \neq 0$, alors on peut réécrire l'équation sous la forme $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$.

En notant $m = \frac{-a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$, on retrouve une équation de la forme $y = mx + p$: l'équation **réduite** de la droite, quand elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Si elle est appelée « réduite », c'est en fait parce qu'elle est réduite par rapport à l'équation cartésienne (elle en découle et ne contient que deux coefficients au lieu de trois).

Remarque Une droite d'équation réduite $y = mx + p$ a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(1; m)$. En effet, on peut voir son équation sous forme cartésienne (en soustrayant y des deux côtés) :

$mx - y + p = 0$, avec $a = m$, $b = -1$ et $c = p$.

Par suite, on sait que $\vec{u}(-b; a)$, donc $\vec{u}(1; m)$ est un vecteur directeur.

► **Exercices** : 15,16,18,19,20p192, 22,27,28p193

c. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Quand deux droites sont sécantes, on peut vouloir déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. Cela revient à résoudre un système, puisque l'on cherche les couples de coordonnées $(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où les deux équations sont celles des droites.

⊗ **Activité** : 3p181 (deux méthodes de résolution algébrique)

Il y a trois méthodes pour résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

- La méthode **graphique**, qui consiste à tracer les droites représentées par les équations et à déterminer les coordonnées des points d'intersections entre les droites (éventuellement aucun ou une infinité). Cette méthode est imprécise en général (comme toute lecture graphique).

Exemple : voir 11 page 190

- Deux méthodes **algébriques** (c'est à dire par calcul) :

- * La méthode par **substitution**, qui consiste à exprimer une des variables en fonction de l'autre dans l'une des équations, puis à remplacer (substituer) dans l'autre équation cette variable par l'expression obtenue. On obtient par résolution d'une équation du premier degré la valeur de la seconde variable, puis celle de la première.

Exemples : voir page 186 et 7 (première équation) et 8 page 187

- * La méthode par **combinaison**, qui consiste à rendre les coefficients d'une variable identiques dans les deux les équations en multipliant les équations par des nombres, puis à faire des soustraction membre à membre des équations afin de supprimer cette variable dans une équation. On résout alors une équation du première ordre, ce qui donne la valeur d'une des variables, ce qui nous permet alors de déterminer la valeur de l'autre variable.

Exemples : voir page 186, 7 (deuxième équation) page 187 et 10 (a) page 189

► **Exercices** : 34,35p193, 111,112,115-120p197 (à limiter selon la rapidité de résolution)