Chapitre :
Vecteurs

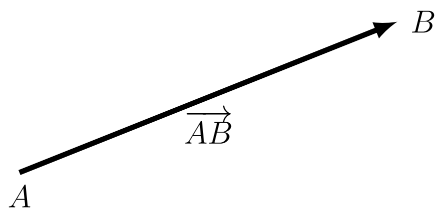
∽

⊛ **Activité :** 1p120

I. Définitions

Définition Soit A et B deux points du plan.
La notation $\overrightarrow{AB}$ se dit « vecteur AB ». Le vecteur est représenté par une flèche, et on écrit son nom le long de cette flèche.
On dit que A est l'**origine** et que B est l'**extrémité**. Un vecteur est caractérisé par trois choses :

- Sa **direction**, c'est à dire celle de la droite (AB) ;
- Son **sens**, celui de A vers B ;
- Sa longueur, ou **norme**, celle de $[AB]$, c'est à dire AB (que l'on peut noter $\|\overrightarrow{AB}\|$).



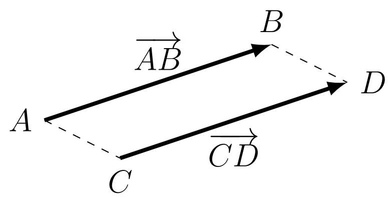
Définition Si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$. Ce vecteur particulier est appelé vecteur nul ; on le note $\overrightarrow{0}$. Ce vecteur est particulier, car il n'a ni direction ni sens. Il est de longueur (de norme) 0.

Définition On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- les directions sont les mêmes, c'est à dire $(AB)//(CD)$;
- les sens sont les mêmes (le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D) ;
- les longueurs sont les mêmes, c'est à dire $AB = CD$

De manière équivalente :

Propriété $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

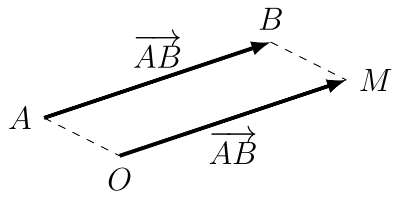


⚠ L'ordre des points est très important ! C'est bien $ABDC$ et pas $ABCD$.

Remarque Quand on a un parallélogramme, on peut alors en déduire plusieurs égalités de vecteurs. Dans le cas de $ABDC$, comme sur la figure ci-dessus, on a en particulier aussi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Quelles sont les deux autres ? Tout simplement $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.

Propriété Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et O un point. Il existe **un unique** point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

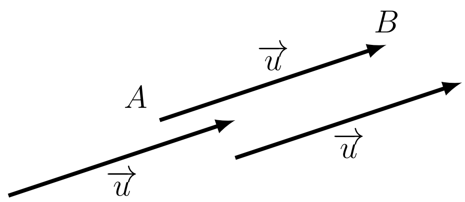
C'est le point M tel que $ABMO$ est un parallélogramme :



On peut dire aussi que M est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque Il est important de comprendre que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, l'objet (vecteur) $\overrightarrow{AB}$ est le même objet que $\overrightarrow{CD}$, bien que les points A et B ne soient pas les points C et D.
Cela parce que le vecteur représente un déplacement, et pas les points eux-mêmes.

On peut nommer un vecteur par une seule lettre (minuscule) surmontée d'une flèche.
Par exemple $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$.
On peut alors représenter un vecteur à plusieurs endroits du plan, il s'agit toujours du même objet.



Définition Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé vecteur opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On le note aussi $-\overrightarrow{AB}$.
Il est de même direction et de même longueur que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, mais de sens contraire.
On a donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Propriété Soit A et B deux points. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu de $[AB]$.

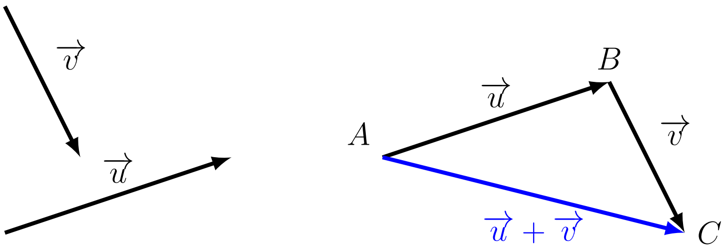
▶ **Exercices :** 15-19p134

▶ **Exercices :** 48-57p137

II. Somme de vecteurs

⊛ **Activité :** 2p120
Pour faire la somme de deux vecteurs, on représente ces deux vecteurs de manière que l'origine de l'un soit l'extrémité de l'autre. La somme est alors le vecteur dont l'origine est l'origine du premier et l'extrémité est l'extrémité du second.

Méthode Pour faire la somme de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
On choisit un point A.
On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ (B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$).
On construit ensuite le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$.
Alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Propriété **(Relation de Chasles)** Soit A, B et C trois points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

c'est la **relation de Chasles**.

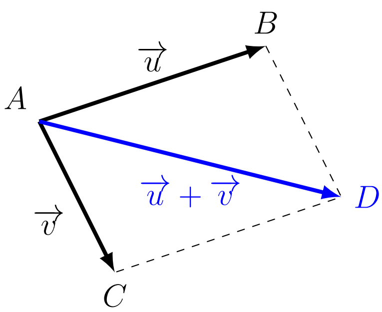
Bien faire attention à avoir le même point entourant un signe $+$ pour appliquer cette relation. Ça ne fonctionne en particulier pas avec un signe $-$.

Parfois, on souhaite faire la somme de deux vecteurs qui ont la même origine, c'est à dire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Il s'agit alors d'une autre propriété :

Propriété **(règle du parallélogramme)** Pour tous points A, B et C du plan,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$$

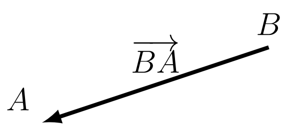
où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Démonstration : Comme $ABDC$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, et donc, en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

Remarque Quelque soit A et B, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
Cela explique pourquoi $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.
On note $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.



Remarque Avec la règle du parallélogramme, on peut remarquer que l'on a :

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

▶ **Exercices :** 20,22p135

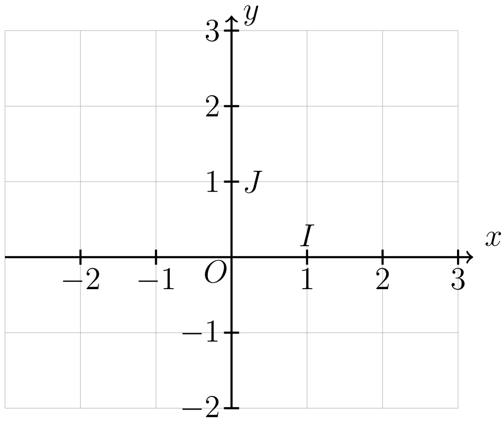
▶ **Exercices :** 61-64,66,67p138, 68-70p139

III. Coordonnées

1. Rappels sur les coordonnées

Définition

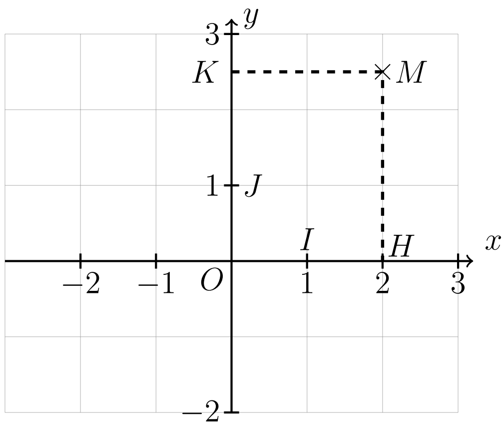
Soit trois points O, I et J du plan tels que OIJ soit un triangle rectangle isocèle en O. Alors le triplet (O,I,J) est un **repère orthonormé** du plan.
Le point O est appelé **origine** du repère.
La droite (OI), graduée et orientée de O vers I, est l'axe des **abscisses**.
La droite (OJ), graduée et orientée de O vers J, est l'axe des **ordonnées**.
La distance OI est l'unité en abscisse, la distance OJ est l'unité en ordonnée, autrement dit $OI = OJ = 1$ (unité).



Définition

Soit M un point du plan. On peut associer à ce point des **coordonnées** dans le repère $(O; I; J)$, notées $(x_M; y_M)$, où x_M est l'abscisse de M et y_M est l'ordonnée de M.
Pour ce faire, on trace le rectangle $OHMK$ tel que $H \in (OI)$ et $K \in (OJ)$.
x_M est alors le réel associé à H sur l'axe des abscisses et y_M celui associé à K sur l'axe des ordonnées.

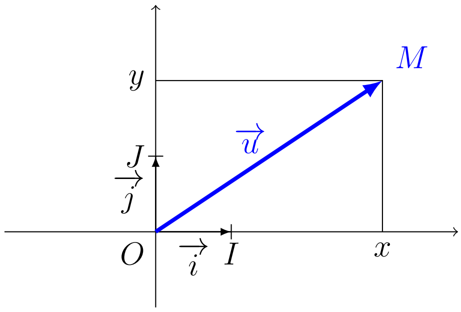
On a $O(0; 0)$, $I(1; 0)$, $J(0; 1)$, et dans cet exemple $M(2; 2{,}5)$.



▶ **Exercice :** Séquence d'exercices « Repérage » sur Labomep.

2. Coordonnées de vecteurs

Définition Dans un repère $(O; I; J)$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
On peut noter $\overrightarrow{OM}(x; y)$ ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Définition En notant $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}$ (voir la figure ci-dessus), on dit que le couple $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une **base du plan**. Au lieu de parler du plan $(O; I; J)$, on parle alors du plan $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Au lieu de dire que l'on exprime les coordonnées d'un vecteur dans le repère $(O; I; J)$, on dit que l'on exprime ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exemple le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ a pour coordonnées $(0; 0)$.

On note $\overrightarrow{u}(x; y)$ pour désigner le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x; y)$. On peut aussi noter : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

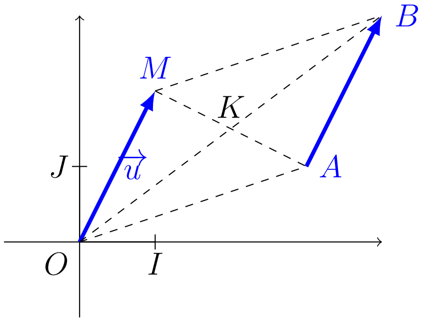
Propriété Les vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$ sont égaux si et seulement si

$$x = x' \text{ et } y = y'$$

Théorème Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans le repère $(O; I; J)$. Alors :

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Démonstration : Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de M sont celles de $\overrightarrow{AB}$ par définition. De plus, $OMBA$ est un parallélogramme. Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu K.

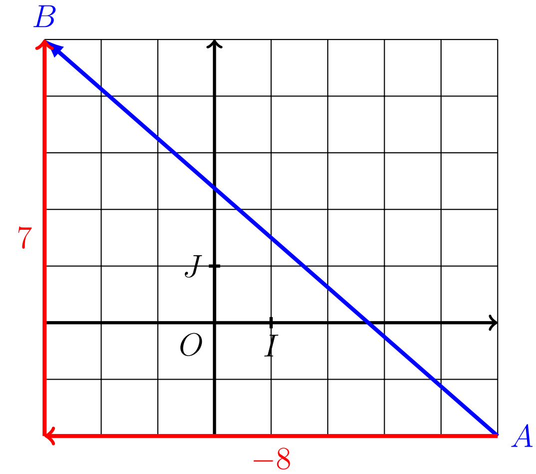


Donc $x_K = \dfrac{x_M + x_A}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \Leftrightarrow x_M + x_A = x_B \Leftrightarrow x_M = x_B - x_A$.
On fait de même avec les ordonnées.

Exemple Si $A(5; -2)$ et $B(-3; 5)$, alors $\overrightarrow{AB}(-3 - 5; 5 - (-2))$, soit $\overrightarrow{AB}(-8; 7)$.

Remarque On peut « lire » les coordonnées des vecteurs sur un repère, en les comprenant comme le déplacement à faire pour aller de l'origine à l'extrémité, selon l'axe des abscisses puis selon celui des ordonnées.

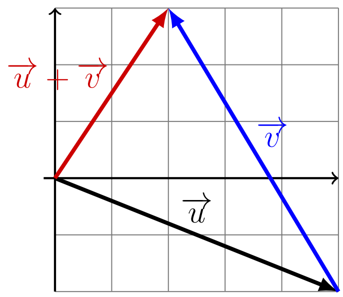
Voyons en effet la figure dans le cas de l'exemple que l'on vient de voir :



On lit bien que les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(-8;7)$.

Théorème Soit $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$. Alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$.

Exemple Soit $\overrightarrow{u}(5;-2)$ et $\overrightarrow{v}(-3;5)$, et $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. Alors $\overrightarrow{w}(2;3)$.



Remarque On a $-\overrightarrow{u}(-x;-v)$ (car $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$)

Exemple Soit $\overrightarrow{u}(2;-3)$ et $\overrightarrow{v}(x-1;y+3)$ tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$. On cherche x et y.
Comme $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$, on en déduit que $2=x-1$ et $-3=y+3$ (leurs coordonnées sont égales).
Alors $x=2+1=3$ et $y=-3-3=-6$.

Exemple On souhaite savoir si $ABCD$ est un parallélogramme, sachant que $A(1;2)$, $B(5;-1)$, $C(7;2)$ et $D(3;5)$.
On sait que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Or d'une part $\overrightarrow{AB}(5-1;-1-2)$, donc $\overrightarrow{AB}(4;-3)$ et d'autre part $\overrightarrow{DC}(7-3;2-5)$, donc $\overrightarrow{DC}(4;-3)$.
Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
On en déduit que $ABCD$ est un parallélogramme.

▶ **Exercices :** 30,28p135, 81,82,80p139, 29p135, 83p140, 32,36p136, 84p140

▶ **Exercices :** 85-91p140

Propriété **(longueur)** La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$, autrement dit la distance AB entre deux points A et B, est telle que :

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

Et donc (puisque $AB>0$) :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Exemple $A(5;1)$ et $B(-1;2)$. Alors $AB^2=(-1-5)^2+(2-1)^2=36+1=37$. D'où $AB=\sqrt{37}$.

▶ **Exercices :** 37,38,39p136

▶ **Exercices :** 100,101p140, 102,103p141

Propriété **(milieu d'un segment)** Soit A et B deux points du plan muni d'un repère. Soit I le milieu de $[AB]$. Alors :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Autrement dit, les coordonnées du milieu se trouvent en faisant les moyennes des coordonnées de A et de B.

Exemple $A(2;3)$ et $B(6;5)$. Alors $I\left(\frac{2+6}{2};\frac{3+5}{2}\right)$, soit $I(4;4)$.

▶ **Exercices :** 40p136, 105p141

Algorithmique :

Exercice 1
Écrire une fonction Python qui prend en arguments quatre variables xA, yA, xB et yB qui sont les coordonnées respectives de deux points A et B, et qui retourne la distance AB.
À savoir : pour pouvoir utiliser la racine carrée, il faut importer une bibliothèque définissant cette fonction. Pour cela, on ajoute en tête du fichier la ligne « `from math import *` » (ainsi on importe toutes les fonctions du module math). La fonction racine carrée a pour nom « `sqrt` » ; ainsi, « `sqrt(4)` » retourne le nombre 2.

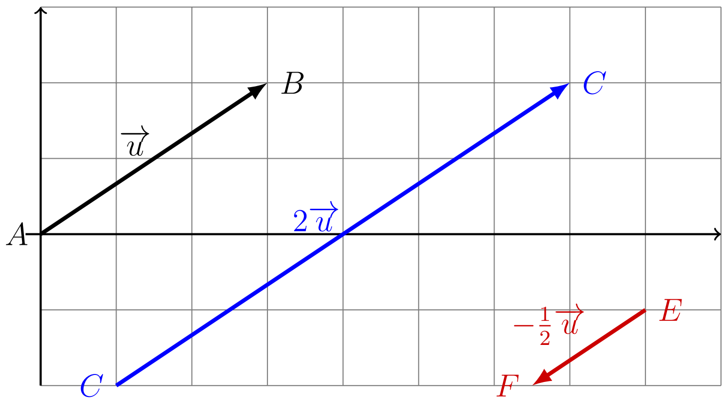
▶ **Exercice :** 142p148 (logique)

IV. Produit par un nombre réel ; colinéarité

⊛ **Activité :** 3p121

Définition Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ et k un réel.
On note $k\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(kx; ky)$.

Exemple Soit $\overrightarrow{v}(3; 2)$. Alors $2\overrightarrow{v}(2 \times 3; 2 \times 2)$, soit $2\overrightarrow{v}(6; 4)$. De même, $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}\left(-\dfrac{3}{2}; -1\right)$.



Graphiquement, Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul, k un réel non nul.
Notons $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$. Alors (CD) et (AB) sont parallèles et :

- Si $k > 0$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens et $CD = kAB$
- Si $k < 0$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire et $CD = -kAB$

Définition On dit que deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, autrement dit si les droites qu'ils portent sont parallèles.

Nous avons vu que si $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont la même direction, donc ils sont colinéaires. Nous admettrons la réciproque, c'est à dire le théorème suivant :

Théorème $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$$

Remarque On peut démontrer que deux droites sont parallèles en démontrant que deux vecteurs sont colinéaires.

Autre conséquence importante :

Propriété Soit A, B et C trois points du plan.
A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Propriété Soit $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Démonstration : Cela vient du fait que les coordonnées sont proportionnelles. En effet, il existe k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, autrement dit

$$x' = kx \text{ et } y' = ky$$

Donc (dans le cas où x et y ne sont pas nuls) $k = \dfrac{x'}{x} = \dfrac{y'}{y}$, et par produit en croix :

$$x'y = xy' \Leftrightarrow xy' - yx' = 0$$

Si jamais $y = 0$ (resp. $x = 0$), alors $y' = 0$ (resp. $y = 0$) et donc $xy' - yx'$ vaut bien 0.

Définition Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\overrightarrow{u}(x; y)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y')$.
On note $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = xy' - yx'$ le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On utilise aussi la notation : $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.
Ainsi, $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ (on remarque une sorte de produit en croix).
Ainsi, d'après la proposition précédente, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$.

▶ **Exercices :** 43-47p136, 108-113, 115-117p141