3. Équations de droites

a. Équation réduite

Nous avons vu plus haut que la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite, dont on a noté l'équation $y = ax + b$.
Ainsi, une équation de la forme $y = ax + b$ est l'équation d'une droite.
Pour éviter des confusions qui pourraient survenir plus tard, dans cette partie, au lieu d'utiliser les lettres a et b, nous utiliseront les lettres m et p.
Autrement dit, nous noterons $y = mx + p$ l'équation d'une droite.
Cependant, toutes les droites n'ont pas une équation de cette forme.

Propriété Toute droite du plan a une équation de la forme :

- soit $y = mx + p$ où m et p sont des réels ;
  Le nombre m est le **coefficient directeur**, on dit aussi que c'est la **pente** de la droite, et p est l'**ordonnée à l'origine**.
  On appelle une équation de droite de cette forme une équation **réduite** (on verra pourquoi dans une section plus bas).
- soit $x = k$, où k est un réel.

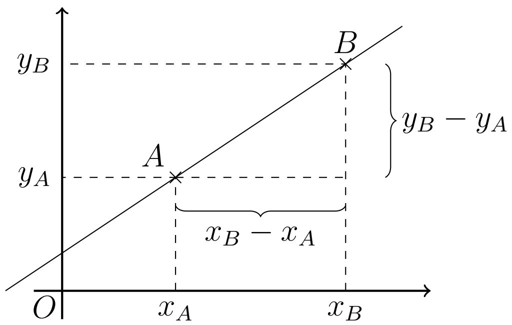
Dans le second cas, la droite est parallèle à l'axe des ordonnées (ensemble des points dont l'abscisse x vaut k, l'ordonnée y étant quelconque).

La propriété suivante permet de trouver le coefficient directeur (la pente) d'une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées), connaissant les coordonnées de deux points de la droite :

Propriété Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = mx + p$.
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$. Alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Graphiquement, on a la chose suivante :



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Une fois que l'on connaît le coefficient directeur, il ne reste plus qu'à trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine, que l'on obtient en utilisant un des deux points.

Exemple Soit $A(-2; 1)$ et $B(4; 2)$. On veut déterminer l'équation de la droite (AB).
Comme $x_A \neq x_B$, l'équation n'est pas de la forme $x = k$, mais de la forme $y = mx + p$.
D'après la propriété, $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-1}{4-(-2)} = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi, l'équation de (AB) est de la forme $y = \dfrac{1}{6}x + p$.

Pour déterminer p, on utilise le fait que par exemple $B \in (AB)$ (on pourrait faire de même avec A). Ainsi, les coordonnées de B satisfont l'équation :

$$\begin{aligned} y_B = \frac{1}{6}x_B + p \Leftrightarrow 2 &= \frac{1}{6} \times 4 + p \\ \Leftrightarrow 2 &= \frac{4}{6} + p \\ \Leftrightarrow 2 &= \frac{2}{3} + p \\ \Leftrightarrow p &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Finalement, $(AB) : y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$

▶ **Exercices :** 78-81p195, 73-77p195, 93p196

Propriété Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.

- Les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes si et seulement si $m \neq m'$.

▶ **Exercices :** 36,38,39p193, 130p198

Lorsque l'on sait que deux droites sont sécantes, on peut vouloir déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. C'est l'objet de la section plus bas sur les systèmes de deux équations.

Méthode Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut chercher à démontrer que (AB) et (AC) sont parallèles. Dans ce cas, comme elles ont un point commun (le point A), alors elles sont nécessairement confondues, et les points A, B et C sont bien alignés.

Exemple Soit $A(6;0)$, $B(0;4)$ et $C(3;2)$.
Le coefficient directeur de (AB) est : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-0}{0-6} = -\frac{2}{3}$.
Celui de (AC) est : $\frac{y_c - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-0}{3-6} = -\frac{2}{3}$.
Les coefficients directeurs sont égaux, donc (AB) et (AC) sont parallèles, et A, B et C sont alignés.

▶ **Exercices :** 103-105p197

b. Équation cartésienne

Cette partie nécessite d'avoir vu la colinéarité des vecteurs et la notion de déterminant.

⊛ **Activité :** 1 page 180

Définition On appelle **vecteur directeur** d'une droite (d) tout vecteur non nul ayant la même direction que (d).

Propriété Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (c'est là qu'il ne faut pas confondre a et b avec les coefficients des fonctions affines), appelée **équation cartésienne** de la droite.
Le vecteur $\overrightarrow{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de cette droite.
Réciproquement, pour tous réels a, b et c tels que $(a;b) \neq (0;0)$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite.

La démonstration de cette propriété, au programme, est disponible dans le manuel à la page 182.

Remarques On peut retrouver les deux types d'équations donnés plus haut :

- Si $b = 0$ (et donc $a \neq 0$), l'équation est alors $ax + c = 0$, donc $x = \frac{-c}{a}$.
  En notant $k = \frac{-c}{a}$, on retrouve une équation de la forme $x = k$.
- Si $b \neq 0$, alors on peut réécrire l'équation sous la forme $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$.
  En notant $m = \frac{-a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$, on retrouve une équation de la forme $y = mx + p$: l'équation **réduite** de la droite, quand elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
  Si elle est appelée « réduite », c'est en fait parce qu'elle est réduite par rapport à l'équation cartésienne (elle en découle et ne contient que deux coefficients au lieu de trois).

Remarque Une droite d'équation réduite $y = mx + p$ a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}(1; m)$.
En effet, on peut voir son équation sous forme cartésienne (en soustrayant y des deux côtés) : $mx - y + p = 0$, avec $a = m$, $b = -1$ et $c = p$.
Par suite, on sait que $\overrightarrow{u}(-b; a)$, donc $\overrightarrow{u}(1; m)$ est un vecteur directeur.

► **Exercices :** 15,16,18,19,20p192, 22,27,28p193

c. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Quand deux droites sont sécantes, on peut vouloir déterminer les coordonnées de leur point d'intersection. Cela revient à résoudre un système, puisque l'on cherche les couples de coordonnées $(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où les deux équations sont celles des droites.

⊛ **Activité :** 3p181 (deux méthodes de résolution algébrique)
Il y a trois méthodes pour résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

- La méthode **graphique**, qui consiste à tracer les droites représentées par les équations et à déterminer les coordonnées des points d'intersections entre les droites (éventuellement aucun ou une infinité). Cette méthode est imprécise en général (comme toute lecture graphique).
  Exemple : voir 11 page 190
- Deux méthodes **algébriques** (c'est à dire par calcul) :
  - La méthode par **substitution**, qui consiste à exprimer une des variables en fonction de l'autre dans l'une des équations, puis à remplacer (substituer) dans l'autre équation cette variable par l'expression obtenue. On obtient par résolution d'une équation du premier degré la valeur de la seconde variable, puis celle de la première.
    Exemples : voir page 186 et 7 (première équation) et 8 page 187
  - La méthode par **combinaison**, qui consiste à rendre les coefficients d'une variable identiques dans les deux les équations en multipliant les équations par des nombres, puis à faire des soustraction membre à membre des équations afin de supprimer cette variable dans une équation. On résout alors une équation du première ordre, ce qui donne la valeur d'une des variables, ce qui nous permet alors de déterminer la valeur de l'autre variable.
    Exemples : voir page 186, 7 (deuxième équation) page 187 et 10 (a) page 189

► **Exercices :** 34,35p193, 111,112,115-120p197 (à limiter selon la rapidité de résolution)