Récursivité

Exercice 1
On considère la fonction factorielle $n!$ définie par $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ si $n > 0$ et $0! = 1$.

1. Donner une définition récursive de la fonction mathématiques $factorielle(n)$.
2. Écrire une fonction Python `fact(n)` qui implémente cette définition.
3. Dessiner l'arbre d'appels correspondant au calcul de `fact(4)`.

Exercice 2
La méthode du paysan russe est un très vieil algorithme de multiplication de deux nombres entiers déjà décrit sur un papyrus égyptien rédigé autour de 1650 avant J.-C. Il s'agissait de la principale méthode de multiplication en Europe avant l'introduction des chiffres arabes.
Cet algorithme repose sur les relations :

$$x \times y = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (x//2) \times (2y) & \text{si } x \text{ est pair} \\ (x//2) \times (2y) + y & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

Écrire une fonction récursive `multiplication_russe(x,y)` qui calcule le produit de `x` et `y` en utilisant la méthode du paysan russe.

Exercice 3
On considère la suite u_n définie par la relation de récurrence suivante, où a et b sont des réels quelconques :

$$u_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ b & \text{si } n = 1 \\ 3u_{n-1} + 2u_{n-2} + 5 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Écrire une fonction `suite(n,a,b)` qui renvoie le `n`-ème terme de cette suite pour des valeurs `a` et `b` données en paramètres.

Exercice 4
Écrire une fonction **récursive** `boucle(i,k)` qui affiche les entiers entre `i` et `k`.
Par exemple, `boucle(1,4)` doit afficher `1 2 3 4` (tout sur la même ligne).
Bien entendu, cette fonction ne doit pas utiliser de boucle `while` ou `for`.
Rappel : l'argument optionnel `end` dans la fonction `print` permet de changer le caractère final qui par défaut est `"\n"` (retour à la ligne).

Exercice 5
Écrire une fonction récursive `nombre_de_chiffres(n)` qui prend un entier positif ou nul `n` en argument et renvoie son nombre de chiffres. Par exemple, `nombre_de_chiffres(12345)` doit renvoyer 5.

Exercice 6
En vous inspirant de l'exercice précédent, écrire une fonction récursive `nombre_de_bits_1(n)` qui prend un entier positif ou nul et renvoie le nombre de bits valant 1 dans la représentation binaire de `n`. Par exemple `nombre_de_bits_1(255)` doit renvoyer 8.

Remarque : cette fonction est utile dans de nombreux algorithmes bas niveau et porte souvent le nom de `popcount` (de l'anglais *population count*). Elle est souvent implémentée dans les unités arithmétiques et logiques des processeurs sur des entiers de taille fixe (32 ou 64 bits).

Exercice 7
Écrire une fonction récursive `appartient(v,t,i)` prenant en paramètres une valeur `v`, un tableau (une liste) `t` et un entier `i` et renvoyant `True` si `v` apparaît dans `t` entre l'indice `i` (inclus) et `len(t)` (exclu), et `False` sinon. Dans un premier temps on supposera que `i` est toujours compris entre `0` (inclus) et `len(t)` (exclu), puis on utilisera l'instruction `assert` pour restreindre les appels à la fonction `appartient(v,t,i)`.

Exercice 8 (Dichotomie)
Soit `tab` un tableau trié d'entiers et `val` une valeur entière.

1. On suppose dans un premier temps que `val` est une valeur de `tab` comprise entre `tab[a]` et `tab[b]`. En utilisant la méthode de la dichotomie (vue en première mais pas sous forme récursive), écrire une fonction récursive `dichotomie_rec(val,tab,a,b)` renvoyant l'indice `i` tel que `tab[i]=val`.
2. Dans cette question, on suppose encore que `val` est un élément de `tab`. A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction `dichotomie(val,tab)` renvoyant l'indice `i` tel que `tab[i]=val`.
3. Modifier la fonction `dichotomie_rec` pour qu'elle renvoie `-1` si `val` n'est pas dans le tableau `tab`.

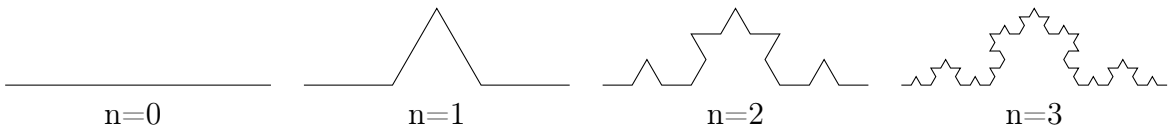
Exercice 9 (Figures fractales)
On souhaite utiliser le module `turtle` de Python pour réaliser quelques figures.
On rappelle ici quelques fonctions de base de ce module (Voir plus sur la page de la librairie) :

```
from turtle import * # importe toutes les fonctions du module
clearscreen() # effacer le contenu de l'écran
left(50) # tourner de 50 degrés sur la gauche
right(70) # tourner de 70 degrés sur la droite
forward(50) # avancer tout droit de 50 pixels
penup() # lever le crayon (pour ne pas écrire en se déplaçant)
pendown() # baisser le crayon (pour écrire en se déplaçant)
fillcolor('blue') # définir la couleur de remplissage
hideturtle() # cacher la tortue
showturtle() # montrer la tortue
begin_fill() # débuter une figure à remplir
end_fill() # remplire la figure
bye() # fermer la fenêtre (à faire dans l'interpréteur)
```

1. La courbe de Koch est une fractale imaginé par le mathématicien suédois Niels Fabian Helge von Koch en 1904.

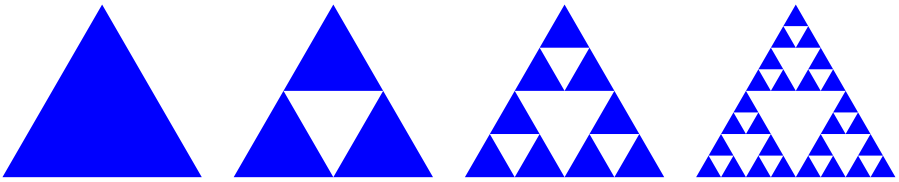
   On peut la créer à partir d'un segment de droite, en modifiant récursivement chaque segment de droite de la façon suivante :
   - On divise le segment de droite en trois segments de longueurs égales.
   - On construit un triangle équilatéral sans base au-dessus du morceau central.

   On répète ce processus n fois, n est appelé l'ordre.



Écrire une fonction `koch(n,l)` qui dessine avec le module `turtle` une courbe de Koch d'ordre `n` à partir d'un segment de longueur `l`.

2. De manière similaire, définir une fonction `Sierpinski(n,l)` qui permet d'obtenir le triangle de Sierpinski (qu'il décrit en 1915) d'ordre `n` et de côté `l` comme ci-dessous :



n=0 n=1 n=2 n=3

Exercice 10 (Extrait modifié d'épreuve pratique)

Soit une image binaire représentée dans un tableau à 2 dimensions. Les éléments `M[i][j]` (`i` étant l'indice de ligne et `j` celui de colonne), appelés pixels, sont égaux soit à `0` soit à `1`.
Une composante d'une image est un sous-ensemble de l'image constitué uniquement de `1` (ou uniquement de `0`) qui sont côte à côte, soit horizontalement soit verticalement.
Par exemple, les composantes de

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0\\\hline 0&1&0&1\\\hline 1&1&1&0\\\hline 0&1&1&0\\\hline\end{array}$$

sont

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0\\\hline 0&1&0&1\\\hline 1&1&1&0\\\hline 0&1&1&0\\\hline\end{array}$$

On souhaite, à partir d'un pixel égal à 1 dans une image M, donner la valeur val à tous les pixels de la composante à laquelle appartient ce pixel.
La fonction `propager` prend pour paramètre une image `M`, deux entiers `i` et `j` et une valeur entière `val` (supposée différente de 1). Elle met la valeur `val` uniquement aux pixels de la composante du pixel `M[i][j]`, à condition que celui-ci vaille `1`.
Par exemple, `propager(M,2,1,3)` donne

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&1&0\\\hline 0&3&0&1\\\hline 3&\mathbf{3}&3&0\\\hline 0&3&3&0\\\hline\end{array}$$

Exemple :

```
>>> M = [[0,0,1,0],[0,1,0,1],[1,1,1,0],[0,1,1,0]]
>>> propager(M,2,1,3)
>>> M
[[0, 0, 1, 0], [0, 3, 0, 1], [3, 3, 3, 0], [0, 3, 3, 0]]
```

Écrire le code de cette fonction `propager(M,i,j,val)` (sous forme récursive).
En cas de difficulté, voir le code à compléter en fin de document.

Exercice 11 (Extrait BAC métropole candidats libres 2021 sujet 2)

On s'intéresse dans cet exercice à un algorithme de mélange des éléments d'une liste.

1. Pour la suite, il sera utile de disposer d'une fonction `echange` qui permet d'échanger dans une liste `lst` les éléments d'indice `i1` et `i2`.

   Expliquer pourquoi le code Python ci-dessous ne réalise pas cet échange et en proposer une modification.

```
def echange(lst, i1, i2):
  lst[i2] = lst[i1]
  lst[i1] = lst[i2]
```

2. La documentation du module `random` de Python fournit les informations ci-dessous concernant la fonction `randint(a,b)` : Renvoie un entier aléatoire `N` tel que `a <= N <= b`.

   Parmi les valeurs ci-dessous, quelles sont celles qui peuvent être renvoyées par l'appel `randint(0, 10)` ?

   0 1 3.5 9 10 11

3. Le mélange de Fischer Yates est un algorithme permettant de permuter aléatoirement les éléments d'une liste. On donne ci-dessous une mise en œuvre récursive de cet algorithme en Python.

```
from random import randint

def melange(lst, ind):
  print(lst)
  if ind > 0:
    j = randint(0, ind)
    echange(lst, ind, j)
    melange(lst, ind-1)
```

   (a) Expliquer pourquoi la fonction `melange` se termine toujours.

   (b) Lors de l'appel de la fonction `melange`, la valeur du paramètre `ind` doit être égal au plus grand indice possible de la liste `lst`. Pour une liste de longueur `n`, quel est le nombre d'appels récursifs de la fonction `melange` effectués, sans compter l'appel initial ?

   (c) On considère le script ci-dessous :

```
lst = [v for v in range(5)]
melange(lst, 4)
```

   On suppose que les valeurs successivement renvoyées par la fonction `randint` sont 2, 1, 2 et 0. Les deux premiers affichages produits par l'instruction `print(lst)` de la fonction `melange` sont :

```
[0, 1, 2, 3, 4]
[0, 1, 4, 3, 2]
```

   Donner les affichages suivants produits par la fonction `melange`.

   (d) Proposer une version itérative du mélange de Fischer Yates.

Aide pour l'exercice 10 :
Compléter le code récursif de la fonction `propager` donné ci-dessous :

```
def propager(M, i, j, val):
  if M[i][j] == ... :
    return
  else:
    M[i][j] = ... :
    # l'élément en haut fait partie de la composante
    if ((i-1) >= 0 and M[i-1][j] == ...):
      propager(M, i-1, j, val)
    # l'élément en bas fait partie de la composante
    if ((...) < len(M) and M[i+1][j] == 1):
      propager(M, ..., j, val)
    # l'élément à gauche fait partie de la composante
    if ((...) >= 0 and M[i][j-1] == 1):
      propager(M, i, ..., val)
    # l'élément à droite fait partie de la composante
    if ((...) < len(M) and M[i][j+1] == 1):
      propager(M, i, ..., val)
```