LYCÉE MARIE CURIE **MATHCO**
2022–2023

Devoir surveillé n°2
Correction

Exercice 1

1. $f(x) = (3x-4)\,\mathrm{e}^{-x}$ donc f est de la forme uv avec $u(x) = 3x-4$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}$ (forme e^{w} avec $w(x) = -x$, donc $w'(x) = -1$ et $v' = w'\,\mathrm{e}^{w}$).
   Or $f' = (uv)' = u'v + uv'$ donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\,\mathrm{e}^{-x} + (3x-4)\times(-\,\mathrm{e}^{-x})\\
&= (3 + (3x-4)\times(-1))\,\mathrm{e}^{-x} && \text{(factorisation par l'exponentielle)}\\
&= (3-3x+4)\,\mathrm{e}^{-x}\\
&= (7-3x)\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

2. Pour connaître les variations de f on détermine le signe de $f'(x)$.
   Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (exponentielle) et $7 - 3x > 0 \Leftrightarrow 7 > 3x \Leftrightarrow \dfrac{7}{3} > x \Leftrightarrow x < \dfrac{7}{3}$. Ainsi :

x	0		$\frac{7}{3}$		4
signe de e^{-x}		$+$		$+$	
signe de $7-3x$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	-4	$\nearrow$	$3\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{3}}$	$\searrow$	$8\,\mathrm{e}^{-4}$

3. Sur $\left[0;\dfrac{7}{3}\right]$:
   - f est continue (car dérivable) ;
   - f est strictement croissante ;
   - $f(0) = -4 < 0 < 3\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{3}}$

   Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[0;\dfrac{7}{3}\right]$.
   Sur $\left[\dfrac{7}{3};4\right]$, le minimum de f est $8\,\mathrm{e}^{-4} > 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;4]$.
4. D'après la calculatrice, $\alpha \simeq 1{,}333$.
5. En fait on peut résoudre directement l'équation :

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow (3x-4)\,\mathrm{e}^{-x} = 0\\
&\Leftrightarrow (3x-4) = 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 0 && \text{(produit nul)}\\
&\Leftrightarrow 3x - 4 = 0 && \text{(une exponentielle ne s'annule jamais)}\\
&\Leftrightarrow 3x = 4\\
&\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\alpha = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 2

1. On souhaite appliquer le TVI. Pour cela on doit connaître les variations de P.
   Pour cela, on calcule P', dont on étudie le signe.
   Or $P'(x) = 3x^2 + 1$, et comme $x^2 \geqslant 0$ (c'est un carré), $3x^2 + 1 > 0$.
   Ainsi, $P'(x) > 0$ et P est strictement croissante.
   On a $P(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$ et $P(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$.
   Alors, sur $[-1; 0]$:
   - P est continue car dérivable (ou car polynomiale)
   - P est strictement croissante
   - $P(-1) < 0 < P(0)$

   Donc l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-1; 0]$.
   Sur $[0; +\infty[$, le minimum est $P(0) > 0$, donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution.
   Sur $]-\infty; -1]$; le maximum est $P(-1) < 0$, donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution.
   Ainsi, l'équation $P(x) = 0$ n'a qu'une solution α sur $\mathbb{R}$.
   D'après la calculatrice, $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.
2. On a, d'après la question précédente :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
variations de P		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de P		$-$	0	$+$	

3. On a $f(x) = 6x^5 + 10x^3 + 15x^2 - 30$.
   Alors $f'(x) = 30x^4 + 30x^2 + 30x = 30x(x^3 + x + 1) = 30xP(x)$.
   Or $30x > 0 \Leftrightarrow x > 0$, et on a déjà étudié le signe de P. Donc :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
signe de $30x$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-30	$\nearrow$	

Exercice 3

1. On a $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x$, puis $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2)$.
2. le signe de $f''(x)$ est celui de $x^2 + x - 2$ (car $12 > 0$ ne change pas le signe).
   Cette expression du second degré a deux racines : 1 et -2 (on calcule $\Delta = 9 > 0$ puis les racines avec les formules). Or $a = 1 > 0$, donc :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
convexité de f		convexe		concave		convexe	

3. La dérivée seconde $f''(x)$ change deux fois de signe en s'annulant, donc il y a deux points d'inflexion. Leurs abscisses sont -2 et 1 respectivement.