Devoir surveillé n°4
Correction

Exercice 1

1. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 6-5\sqrt{n}=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n-10=+\infty$.
   Alors par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}(6-5\sqrt{n})(2n-10)=-\infty$
2. On souhaite déterminer la limite de la suite u définie par $u_n=\dfrac{5n-3}{2n+1}$.
   (a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n-3=\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1=+\infty$.
   Ainsi, on a une limite de la forme $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ qui est indéterminée.
   (b) On a :
$$\begin{aligned}\frac{5-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}&=\frac{n\left(5-\frac{3}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}\\&=\frac{5n-\frac{3n}{n}}{2n+\frac{n}{n}}\\&=\frac{5n-3}{2n+1}\\&=u_n\end{aligned}$$
   (c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\dfrac{3}{n}=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n}=2$.
   Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{5}{2}$.
3. (a) Quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $-1\leqslant\sin(5n+\pi)\leqslant 1$. Or :
$$\begin{aligned}-1\leqslant\sin(5n+\pi)\leqslant 1&\Leftrightarrow -3\leqslant 3\sin(5n+\pi)\leqslant 3\\&\Leftrightarrow -4\leqslant 3\sin(5n+\pi)-1\leqslant 2\\&\Leftrightarrow \frac{-4}{2n+1}\leqslant\frac{3\sin(5n+\pi)-1}{2n+1}\leqslant\frac{2}{2n+1}\quad(2n+1\text{ est positif})\\&\Leftrightarrow \frac{-4}{2n+1}\leqslant u_n\leqslant\frac{2}{2n+1}\end{aligned}$$
   (b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-4}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{2n+1}=0$.
   Par suite, d'après la question précédent et le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

Exercice 2

1. On a $u_0=2$ (donné), $u_1=4u_0-9=4\times 2-9=-1$
   puis $u_2=4u_1-9=4\times(-1)-9=-4-9=-13$.

2. On a :

$$\begin{aligned} x = 4x - 9 &\Leftrightarrow 0 = 3x - 9 \\ &\Leftrightarrow 9 = 3x \\ &\Leftrightarrow 3 = x \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{S} = \{3\}$, et $\alpha = 3$.

3. On a donc $v_n = u_n - 3$.
   (a) On exprime :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} \\ &= \frac{4u_n - 9 - 3}{u_n - 3} \\ &= \frac{4u_n - 12}{u_n - 3} \\ &= \frac{4(u_n - 3)}{u_n - 3} \\ &= 4 \text{ constant} \end{aligned}$$

   Ainsi, v est géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$.

   (b) Comme v est géométrique, on a $v_n = v_0 \times q^n = -1 \times 4^n = -4^n$.

   (c) Comme $v_n = u_n - 3$, alors $u_n = v_n + 3 = -4^n + 3 = 3 - 4^n$.

   (d) Comme $q = 4 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - 4^n = -\infty$.
   La suite u diverge vers $-\infty$.