# Modèles fonctionnels

**Exercice 1 (Dérivation – révision de première)**
Dans chaque cas, dériver la fonction $f$.

1. $f(x) = 3x - 2$
2. $f(x) = -x^2 + 5x + 256$
3. $f(t) = 3t^2 - t - 2$
4. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{6} + x - 4$
5. $f(x) = -\dfrac{3x^4}{5} + \dfrac{3x^2}{4} + 1$
6. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
7. $f(t) = 2\sqrt{t}$
8. $f(x) = \sqrt{x} - x^3 - 3x + \dfrac{4}{x}$
9. $f(x) = x\sqrt{x}$
10. $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$
11. $f(x) = (5x - 3)(4x^2 + 2)$
12. $f(x) = \dfrac{5x - 2}{2x + 3}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
14. $f(x) = \sqrt{5x + 6}$

**Exercice 2 (Dérivation)**
Dans chaque cas, on définit une fonction $f$ sur un ensemble $D$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $x$.

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3x^2 + 4\sqrt{x}$ sur $D = ]0; +\infty[$.
3. $f(x) = 5\,\mathrm{e}^x - x + 3$ sur $D = \mathbb{R}$.

**Exercice 3 (Dérivation)**
Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction dérivée (sur $D = \mathbb{R}$).

1. $f(x) = (4x + 1)^2$
2. $f(x) = (-6x + 1)^2$
3. $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{2x+4}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x+1}$
5. $f(x) = (\mathrm{e}^x + 1)^2$
6. $f(x) = -4\,\mathrm{e}^{x^2}$

**Exercice 4 (Dérivation)**
Dans chaque cas, on définit une fonction $f$ sur un ensemble $D$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $x$.

1. $f(x) = (2x^3 - 3)^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 4(-4x^2 + 3x + 5)^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 2(x - 1)^3 + 0{,}5x + 2$ sur $D = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x + 6}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
5. $f(x) = \dfrac{-2x + 1}{x^2 + 1}$ sur $D = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 8}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
7. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $D = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = 4 - 3\,\mathrm{e}^{-0{,}1x+3}$ sur $D = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \sqrt{5x + 10}$ sur $D = ]-2; +\infty[$.
10. $f(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ sur $D = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = (0{,}5x - 1)\,\mathrm{e}^{3x+1}$ sur $D = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\mathrm{e}^{2x}}$ sur $D = \mathbb{R}$.

**Exercice 5 (Signe)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-3x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Le tableau de signes ci-dessous comporte des erreurs. Les corriger.

| $x$ | $-\infty$ | | $0{,}33$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{e}^{-x}$ | | | $-$ | | |
| $-3x + 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Exercice 6 (Signe)**
Obtenir, dans chaque cas, le tableau de signes de la fonction $f$ définie par son expression sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5x^2 - 5x - 10$
2. $f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}8x - 1{,}5$
3. $f(x) = (-3x + 1)(2x + 8)$
4. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ $(x \neq -1)$
5. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x} - 3$
6. $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 1$

**Exercice 7 (Variations)**
Dans chaque cas, on considère une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. Justifier que $f$ est monotone sur $I$.

1. $f(x) = \sqrt{-3x+9}$ sur $I = ]-\infty; 3]$.
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{-5x+2}{2x+4}$ sur $I = ]-2; +\infty[$.
5. $f(x) = 10 - 4\,\mathrm{e}^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

**Exercice 8 (Variations)**
Soit $h$ la fonction définie sur $I = [-2; 2]$ par $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in I$, $h'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de $h$ sur $[-2; 2]$, en précisant les extrema.

**Exercice 9 (Variations)**
Dans chaque cas, on considère une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. Construire le tableau de variations de $f$ sur $I$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ sur $I = [-3; 6]$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$ sur $I = [-2; 4]$.
3. $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $I = [-5; 5]$.

**Exercice 10 (Variations)**
Étudier dans chaque cas les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ (déjà dérivée dans l'exercice 4).

1. $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$
2. $f(x) = (0{,}5x - 1)\,\mathrm{e}^{3x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{2x}}$

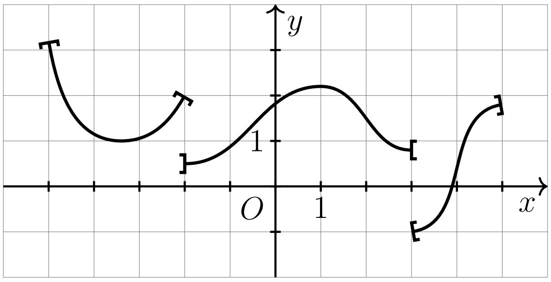
**Exercice 11 (Tangente)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2}$.

1. Dresser le tableau de variations de $f$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative sur $f$ au point d'abscisse $-1$.

**Exercice 12 (Tangente)**
Dans chaque cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $a$.

1. $f(x) = \dfrac{4x+1}{\mathrm{e}^x}$ ; $a = 0$
2. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ ; $a = 1$

**Exercice 13 (Continuité)**
On considère une fonction $f$ définie sur $[-5; 5]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est la suivante :




La fonction est-elle continue :

1. En 3 ?
2. En 1 ?
3. sur $[-3; 3]$ ?
4. sur $]-2; 3[$ ?
5. sur $[-5; 2]$ ?

**Exercice 14 (TVI)**
On considère une fonction $f$ continue dont on donne ci-dessous le tableau de variations :

| $x$ | $-10$ | | $-5$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

On pourra répondre aux questions suivantes sans justifier.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$ ?
2. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ ?
3. Établir le tableau de signes de la fonction $f$.

**Exercice 15 (TVI)**
Soit $g$ la fonction définie sur $[-3; 6]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x - 8$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[-3; 6]$. Déterminer un encadrement de $\alpha$ au millième près.
3. En déduire le tableau de signes de $g$ sur $[-3; 6]$.

**Exercice 16 (TVI)**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-2; 2]$ par : $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 2x + 3$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
2. Déterminer, en justifiant, le nombre de solution des équations suivantes :

   (a) $f(x) = 3$ (b) $f(x) = 1$ (c) $f(x) = 6$

**Exercice 17 (TVI)**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-2; 1]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - 3x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
2. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur $[-2; 1]$.
3. Donner une valeur approchée au centième de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 3$.

**Exercice 18 (TVI)**
Démontrer que l'équation $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et encadrer celle-ci par deux entiers consécutifs.
Indication : trouver un intervalle $[a; b]$ dans lequel se trouve cette solution, le démontrer, puis démontrer qu'il n'en existe pas au-delà.

**Exercice 19 (TVI)**
Soit la fonction $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
L'équation $f(x) = 1$ admet-elle des solutions ? Justifier.

**Exercice 20 (TVI)**
On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction $f$.
Déterminer, suivant la valeur du réel $k$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

| $x$ | $-5$ | | $1$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $5$ |

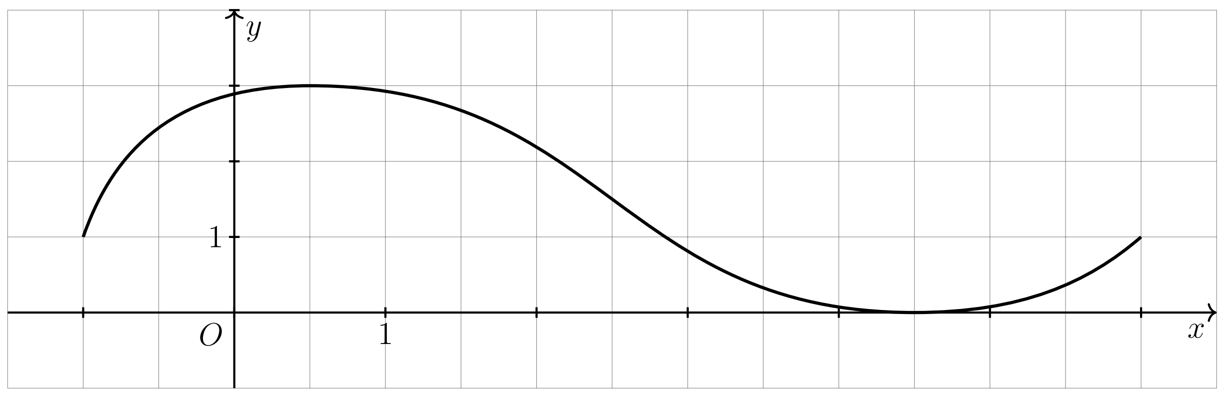
**Exercice 21 (TVI – prix d'équilibre)**
Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse, sur une année, 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75€. On estime que les fonctions d'offre $f$ et de demande $g$ sont définies sur $[15; 75]$ par :

$$f(x) = 55{,}8x + 1\ 340 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -0{,}03x^3 + 5x^2 - 300x + 8\ 790$$

où $x$ est le prix d'un livre, en euro.
Cela signifie que lorsqu'un livre coûte $x$ euro, l'éditeur est prêt à vendre $f(x)$ livres et les consommateurs sont prêts à acheter $g(x)$ livres.

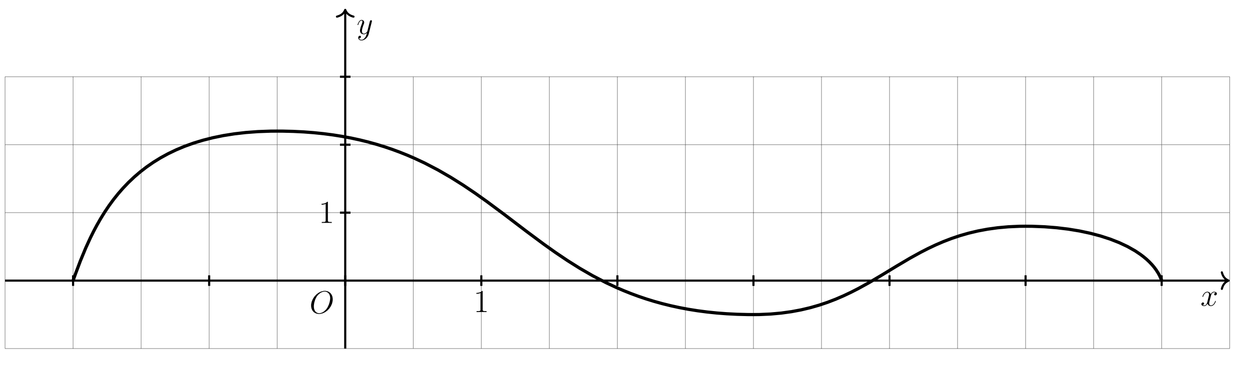
1. (a) Calculer $f(30)$ et $g(30)$. Interpréter les valeurs obtenues.
   L'offre est-elle supérieure à la demande ?
   (b) Mêmes questions avec $f(50)$ et $g(50)$.
2. Étudier les variations de $f$ sur $[15; 75]$. Interpréter.
3. Étudier les variations de $g$ sur $[15{,}75]$. Interpréter.
4. On appelle **prix d'équilibre** le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.
   Après avoir justifié que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution $x_0$ sur $[15; 75]$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de $x_0$, arrondie au centime d'euro près.
   Quelles sont alors l'offre et la demande ? Arrondir à l'unité.

**Exercice 22 (Convexité – graphique)**
Soit $f$ la fonction dérivable sur $[-1; 6]$ dont la courbe représentation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.




1. Étudier (graphiquement) la convexité de $f$ sur $[-1; 6]$.
2. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.

**Exercice 23 (Convexité – graphique)**
Soit $g$ la fonction dérivable sur $[-2; 6]$ dont la courbe représentation $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-dessous.




1. Étudier (graphiquement) la convexité de $g$ sur $[-2; 6]$.
2. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.

**Exercice 24 (Convexité – relation avec la dérivée)**
Reprendre les deux exercices précédents et indiquer les variations de la fonction dérivée

**Exercice 25 (Convexité – relation avec la dérivée)**
On considère quatre fonctions dérivables $f$, $g$, $h$ et $k$, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations, ainsi que ceux de leurs dérivées.

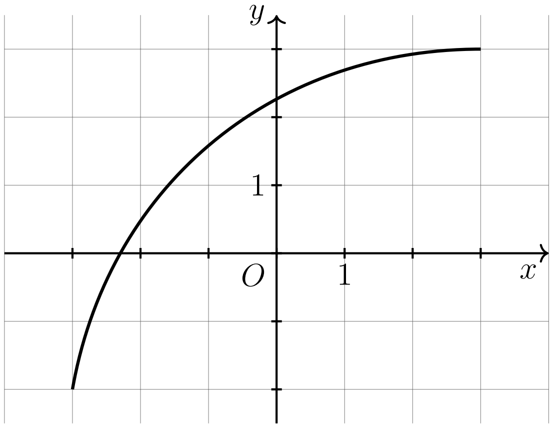
| $x$ | $-3$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | ↗ | |
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $3$ |

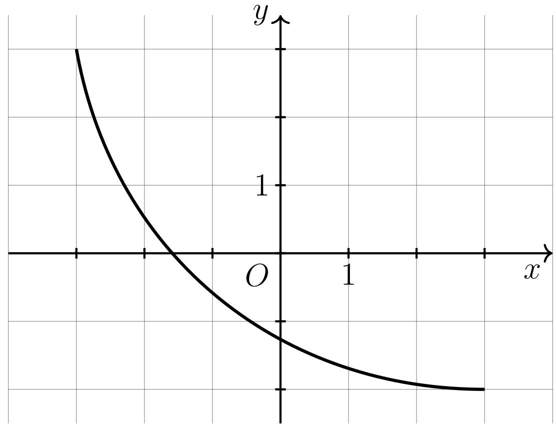
| $x$ | $-3$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | ↘ | |
| $g(x)$ | $-2$ | ↗ | $3$ |

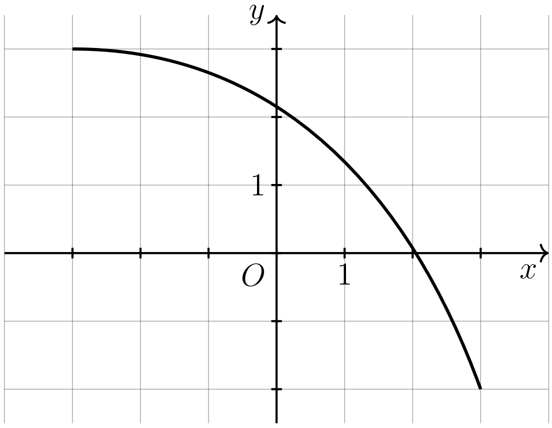
| $x$ | $-3$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | ↘ | |
| $h(x)$ | $3$ | ↘ | $-2$ |

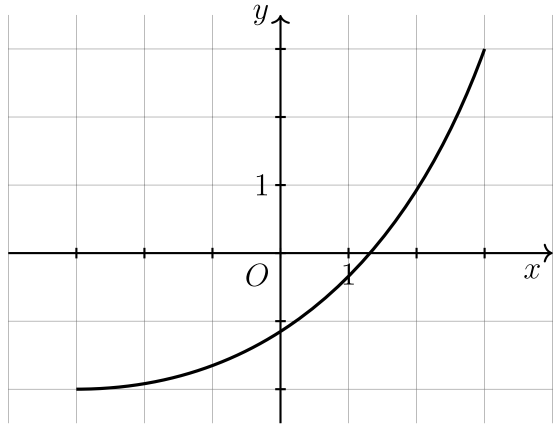
| $x$ | $-3$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | | ↗ | |
| $k(x)$ | $3$ | ↘ | $-2$ |

1. Les courbes de ces fonctions sont données ci-dessous. Associer fonctions et courbes, en justifiant.

(a)



(c)



(b)



(d)



2. Préciser la convexité des fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$.

**Exercice 26 (Convexité – calculs)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2$.

1. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
2. Étudier la convexité de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 27 (Convexité – calculs)**
Soit $f$ la fonction définie sur $[1; 5]$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$.

1. Étudier les variations de $f$.
2. Étudier la convexité de $f$.

**Exercice 28 (Convexité – calculs)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1}$.

1. Déterminer le signe de $f$
2. Déterminer les variations de $f$
3. Déterminer la convexité de $f$.
4. Déterminer le signe de $f'$
5. Déterminer les variations de $f'$
6. Déterminer la convexité de $f'$.

**Exercice 29 (Convexité – calculs)**
Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -0{,}5x^2 - x + 3{,}5$$

1. Étant donné que ces deux fonctions sont polynomiales de degré 2, indiquer l'apparence de leurs courbes représentatives en justifiant.
   Conjecturer alors la convexité de ces deux fonctions.
2. (a) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
   (b) Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$.
   (c) Démontrer alors les conjectures précédentes.

**Exercice 30 (Convexité – calculs)**
Soit $f$ la fonction définie sur $[-1; 8]$ par : $f(x) = \dfrac{5x}{(x+2)^2}$.
On admet les résultats suivants :

$$f'(x) = -5 \times \frac{x-2}{(x+2)^2} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 10 \times \frac{x-4}{(x+2)^4}$$

1. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-1; 8]$.
2. Déterminer la convexité de $f$.
3. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de la courbe représentative de $f$.

**Exercice 31 (Convexité – calculs)**
Déterminer la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$ :

1. $f(x) = x^4 - 3x + 2$
2. $f(x) = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 2$
3. $f(x) = -2x^2 + 3$
4. $f(x) = -5\,\mathrm{e}^{3x} + 4$

**Exercice 32 (Convexité – calculs)**
Déterminer la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$. Préciser leur(s) point(s) d'inflexion.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}x^2$
3. $f(x) = (x-1)^3 + 2$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
6. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$