Modèles discrets

∽

Exercice 1 (Calculs de termes)
Dans chaque cas, préciser de quelle manière est définie la suite et calculer les quatre premiers termes de la suite :

1. $u_n = 4(n-1)^2 + 3$
2. $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = -2v_n + 3$
3. $w_n = 2w_n + n + 3$
4. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$
5. $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 2n - 3$
6. $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + n + 3$

Exercice 2 (Variations)
Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite.

1. $u_n = 5n - 3$
2. $v_n = 2 - \dfrac{3}{n}$ $(n \geqslant 1)$
3. $w_n = 5 + (-1)^n \times 4$
4. $u_n = n^2 + 3n - 2$
5. $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \end{cases}$
6. $\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{n+1} = w_n + \mathrm{e}^{-n} + 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$

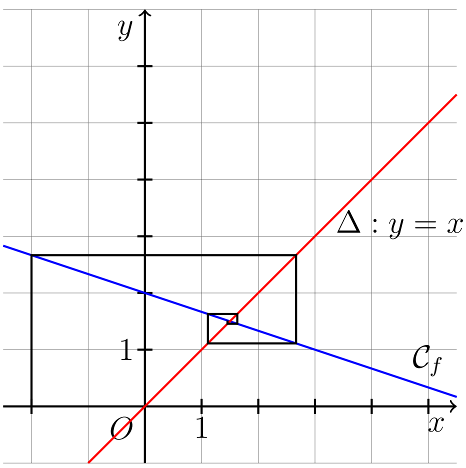
Exercice 3 (Variations)
On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{50}.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-5}{(2n+1)(2n+3)}$.
3. En déduire le sens de variation de la suite u.

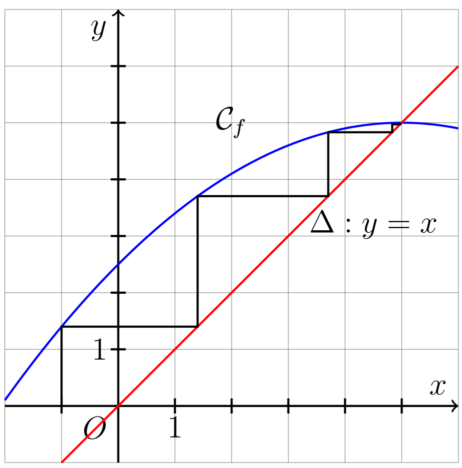
Exercice 4 (Représentation)
Dans chaque cas, on a tracé ci-dessous la représentation d'une fonction f et on a représenté les quatre premiers termes de la suite u, définie par sont premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans chaque cas :

1. Donner la valeur de u_0 et des valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3.
2. Conjecturer le sens de variation de u.

Cas 1



Cas 2



Exercice 5 (Représentation)
On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.

1. (a) Identifier la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction f, et tracer la droite Δ d'équation $y = x$.
2. Obtenir la représentation graphique de la suite u et montrer les valeurs des cinq premiers termes sur l'axe des abscisses.
3. Déterminer par calcul les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.
4. Conjecturer le sens de variation de la suite u.

Exercice 6 (Représentation)
On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. (a) Identifier la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (b) Tracer la courbe représentative de la fonction f, et tracer la droite Δ d'équation $y = x$.
2. Obtenir la représentation graphique de la suite u et montrer les valeurs des cinq premiers termes sur l'axe des abscisses.
3. Déterminer par calcul les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de Δ.
4. Conjecturer le sens de variation de la suite u.

Exercice 7 (Suites arithmétiques)
Dans chaque cas, on donne la raison r et le terme initial d'une suite arithmétique u.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n. Déterminer les variations de la suite u.

1. $r = -3$ et $u_0 = 17$
2. $r = 2$ et $u_0 = -0{,}4$
3. $r = 5$ et $u_1 = -3$
4. $r = -2$ et $u_1 = 5$

Exercice 8 (Suites arithmétiques)
Dans chaque cas suivant, vérifier si la suite est arithmétique ou non, et le justifier.
Dans le cas où elle est arithmétique, en donner la raison et le premier terme.

1. $u_n = (n+1)^2 - (n+2)^2$
2. $u_n = -3 \times 4^n$
3. $u_n = -5n + 3$
4. $u_n = 5n^2 - 1$
5. $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \end{cases}$

Exercice 9 (Suites géométriques)
Dans chaque cas, on donne la raison q et le terme initial d'une suite arithmétique v.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis v_n en fonction de n. Déterminer les variations de la suite v.

1. $q = 0.8$ et $v_0 = 100$
2. $q = 1{,}2$ et $v_1 = 3$
3. $q = \dfrac{5}{3}$ et $v_0 = 9$
4. $q = \dfrac{2}{3}$ et $v_1 = 5$

Exercice 10 (Suites géométriques)
Dans chaque cas suivant, vérifier si la suite est géométrique ou non, et le justifier.
Dans le cas où elle est géométrique, en donner la raison et le premier terme.

1. $u_n = -2 + 5n$
2. $u_n = -3 \times 4^n$
3. $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 5 \end{cases}$
4. $u_n = 5n^2$
5. $\begin{cases} v_1 = 0{,}5 \\ v_{n+1} = -5v_n \end{cases}$

Exercice 11 (Modélisation)
Pour chaque situation ci-dessous, indiquer si elle peut être modélisée par une suite arithmétique ou géométrique, en précisant, si c'est le cas, la raison.

1. Le loyer de Mathilde augmente de 50 euros à chaque fin d'année.
2. Thomas a placé 2 000 euros sur un compte épargne rémunéré à 1% d'intérêts pendant 10 ans.
3. Lors d'une première démarque, le prix d'un short a baissé de 10%. Il a baissé de 30% la deuxième fois.
4. Tous les ans, une ville perd $\frac{1}{10}$ de sa population.

Exercice 12 (Modélisation)
On souhaite modéliser les deux situations suivantes :

Situation 1 : Un établissement scolaire voir partir chaque année 30% de ses élèves et enregistre l'arrivée de 350 nouveaux élèves. En 2020, il y avait 1 000 élèves.

Situation 2 : Un capital de 1 000 euros est placé à un taux d'intérêt annuel de 3%.
Chaque année, on retire 50 euros après après touché les intérêts.

On notre u et v les suites modélisant ces situations.

1. Associer chaque situation à la bonne suite sachant que que $u_1 = 980$ et $v_1 = 1050$.
2. Déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n puis celle de v_{n+1} en fonction de v_n.
3. (a) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée en 2022.
   (b) Calculer le capital placé au bout de 4 ans.

Exercice 13 (Modélisation)
Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable dans les deux sens. On place dans les récipients A et B deux solutions contenant respectivement 150 molécules et 20 molécules. On suppose que toutes les heures, 20% des molécules passent de A dans B et 10% passent de B dans A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les effectifs respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures.
On a donc $a_0 = 150$ et $b_0 = 20$.

1. Calculer l'effectif de molécules présentes dans A et B au bout d'une heure.
2. Pour n entier naturel, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Calculer l'effectif de molécules présentes dans A et B au bout de quatre heures.
4. À l'aide d'un tableur, conjecturer les effectifs des molécules dans chaque compartiment à long terme.

Exercice 14 (Modélisation)
Le mathématicien toscan Fibonacci, dit Léonard de Pise, pose en 1202 le « problème des lapins » :

> Un couple de lapins, né le 1er janvier, donne naissance à un autre couple de lapins chaque mois, dès qu'il atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples de lapins suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le 1er janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu entre temps ?

Pour n entier naturel non nul, on note u_n le nombre de couples de lapins au cours du n-ième mois.
On a $u_1 = 1$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
3. Répondre alors au problème posé par Fibonacci.

Remarque : la suite u est appelée suite de Fibonacci.

Exercice 15 (Limites – forme déterminée)
Déterminer les limites des suites ci-dessous :

1. $u_n = n^2 + 3n - 1$
2. $v_n = 2 - \dfrac{3}{n}$
3. $w_n = n(1 - 2n)$
4. $u_n = n + \dfrac{2}{n^2 + 1}$
5. $v_n = 5 - 3n^2 - \sqrt{n}$
6. $w_n = 1 - 2 \times 0{,}7^n$
7. $w_n = -1000 \times 1{,}02^n$
8. $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = 0{,}99 v_n \end{cases}$
9. u est géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 2$.
10. v est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -7$

Exercice 16 (Limites – formes indéterminées)
Dans chacun des cas suivants :

1. Calculer la limite de u_n et celle de v_n.
2. Exprimer et simplifier la somme $u_n + v_n$.
3. Obtenir la limite de la somme $u_n + v_n$.

- $u_n = n^2$ et $v_n = -n^2 - n + 1$
- $u_n = n(n+1)$ et $v_n = 10 - n^2$
- $u_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 2 - n$

Quelle observation faire ?

Exercice 17 (Limites – formes indéterminées)
Dans chacun des cas suivants :

1. Calculer la limite de u_n et celle de v_n.
2. Exprimer et simplifier le produit $u_n \times v_n$.
3. Obtenir la limite du produit $u_n \times v_n$.

- $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$
- $u_n = n^2$ et $v_n = -\dfrac{2}{n^3}$
- $u_n = 2n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{3n^2}$

Quelle observation faire ?

Exercice 18 (Limites – formes indéterminées)
On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^3 - 2n + 5$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite u.
2. Démontrer que $u_n = n^3 \left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}\right)$.
3. En déduire la limite de la suite u.

Méthode générale : pour une expression polynomiale, il s'agit de factoriser par la plus grande puissance de n, puis de simplifier.

Exercice 19 (Limites – formes indéterminées)
On considère la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2n}{n^3 + 1}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite u.
2. Démontrer que $v_n = \dfrac{2}{n^2 + \dfrac{1}{n}}$.
3. En déduire la limite de la suite v.

Méthode générale : pour un quotient d'expressions polynomiales, il s'agit de factoriser par la plus grande puissance de n, séparément au numérateur et au dénominateur, puis de simplifier.

Exercice 20 (Limites – formes indéterminées)
En utilisant les méthodes des deux exercices précédents, déterminer les limites des suites ci-dessous :

1. $u_n = 3n^3 - 6n^2 + 2n - 5$
2. $v_n = 5n^3 - n^2 + 1$
3. $w_n = \dfrac{n^2+5n}{n+1}$
4. $v_n = \dfrac{5n+3}{2n-1}$

Exercice 21 (Limites – formes indéterminées)
Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$.

1. Obtenir la représentation graphique de u à la calculatrice et conjecturer sa limite.
2. Déterminer l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Calculer $\dfrac{2v_n}{1+v_n}$, et en déduire une expression de u_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que $u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2^n}}$.
   (d) En déduire la limite de u.

Exercice 22 (Limites – comparaison)
Dans chacun des cas ci-dessous, la suite u est définie sur $\mathbb{N}$.

- Calculer les 4 premier termes (avec la calculatrice ; attention à régler les angles en radian).
- Obtenir la représentation graphique sur calculatrice.
- Obtenir un encadrement de la suite, puis obtenir sa limite grâce au bon théorème de comparaison.

1. $u_n = n + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right)$
2. $u_n = 2n + (-1)^n$
3. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}n^2\right) - n$
4. $u_n = n^2 - (-1)^n + 2n + 1$
5. $u_n = \dfrac{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)}{n+1}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n+\mathrm{e}^{-n}}$

Exercice 23 (Limites – facultatif)
Soient u et v les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - v_n}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 20 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer puis représenter les premiers termes de u et v.
2. Conjecturer les variations et les limites de chacune de ces suites.
3. Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - 2u_n$.
   (a) Calculer les premiers termes de w.
   Émettre alors une conjecture au sujet de la suite w.
   (b) Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
   En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis démontrer les conjectures émises en 2.

Exercice 24 (Limites – somme de termes de suite géométrique)
Dans chaque cas, calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique v.

1. $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. $v_n = -2 \times 1{,}5^n$.
3. v a pour raison 1,1 et pour premier terme $v_0 = 4$.

Exercice 25 (Limites – somme de termes de suite géométrique)
Dans chaque cas, exprimer la somme S_n à l'aide de la formule du cours, puis en déterminer la limite.

1. $S_n = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + \cdots + 0{,}2^n$
2. $S_n = -5 - 5 \times 3 - 5 \times 3^2 - \cdots - 5 \times 3^n$
3. $S_n = 2 \times 0{,}92^2 + 2 \times 0{,}92^3 + \cdots + 2 \times 0{,}92^n$

Exercice 26 (Suites arithmético-géométriques)
Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles. Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20% des abeilles de l'année précédente, et il rachète 10 000 abeilles.
On modélise l'effectif des abeilles par une suite u, où u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaine de milliers, au bout de la n-ième année. On a donc $u_0 = 1$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.
2. (a) Tracer dans un repère la droite d'équation $y = 0{,}8x + 1$ et la droite Δ d'équation $y = x$.
   (b) Représenter alors graphiquement la suite u.
   (c) Conjecturer la limite de la suite u.
3. Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 5$.
   (a) Montrer que la suite v est géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 5 - 4 \times 0{,}8^n$.
   (c) Démontrer la conjecture formulée à la question 2.(c).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 27 (Suites arithmético-géométriques)
Un fabricant de calculatrices estime que, chaque année, les ventes augmentent de 5% par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre 10 000 ventes. En 2019, il en a vendu 600 000. Pour n entier naturel, on note u_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année $2019 + n$. On a donc $u_0 = 600$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 10$.
2. (a) Déterminer une suite constante vérifiant la même relation de récurrence que u.
   On note α cette constante.
   (b) Montrer que la suite v, définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$, est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite u.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 28 (Suites arithmético-géométriques)
Une grande université accueillait 27 500 étudiants en septembre 2019. La capacité d'accueil de ce campus ne peut excéder 33 000 étudiants. D'après une étude statistique, chaque année, 156 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 30 juin) ; de plus, les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4% par rapport à ceux du mois de juin qui précède. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre $2019 + n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.
   Préciser la valeur de u_0.
2. (a) Déterminer une suite constante, notée α, vérifiant la même relation de récurrence que u. Déterminer la nature de la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - \alpha$.
   (b) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 23\ 600 \times 1{,}04^n + 3\ 900$
3. (a) Déterminer la limite de la suite u. Interpréter.
   (b) Déterminer l'année à partir de laquelle la capacité de 33 000 étudiants sera dépassée.

Exercice 29 (Suites arithmético-géométriques – facultatif)

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$, $u_1 = 7$ et $u_{n+2} = \dfrac{5}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

1. À l'aide de la calculatrice, calculer les premiers termes de la suite. Conjecturer ses variations et son éventuelle limite.
2. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.
   (a) Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire la nature de v.
   (b) En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n, puis la nature de la suite u.
   (c) Résoudre l'équation $x = \dfrac{1}{4}x + 6$.
   Continuer alors les étapes pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) En déduire la limite de u.

Exercice 30 (Suites arithmético-géométriques – facultatif)

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{7}{3}$.

1. À l'aide de la calculatrice, représenter les termes de la suite u et conjecturer les variations et la limite de la suite.
2. En suivant les étapes, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$.
   Démontrer que $S_n = \left(1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \times \dfrac{54}{25} + \dfrac{7}{5}(n+1)$.
4. Avec du bon sens, justifier le commentaire : « Pour n assez grand, la somme des termes vaut environ $1{,}4n$ ».