# Modèles continus

**Exercice 1 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)**
On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction $f$.
Donner l'ensemble de définition de $f$, les limites de $f$ aux bornes de cet ensemble, ainsi que les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Tracer enfin une courbe pouvant représenter la fonction $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $+\infty$ ‖ | | $4$ | | |
| | | $\nearrow$ | ‖ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| | $0$ | | ‖ $-\infty$ | | | | $1$ |

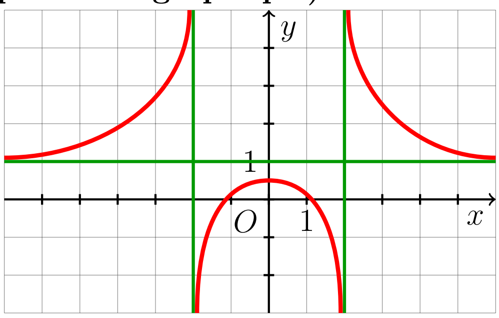
**Exercice 2 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)**
Faire de même que l'exercice précédent avec les tableaux suivants :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $+\infty$ ‖ | | $3$ |
| | | $\nearrow$ | ‖ | $\nearrow$ | |
| | $-2$ | | ‖ $-\infty$ | | |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | | ‖ $+\infty$ | | | | $3$ |
| | | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| | | | $-\infty$ ‖ | | $1$ | | |

**Exercice 3 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)**
La courbe ci-contre représente une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
Les droites d'équations $x = 2$, $x = 2$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Lire graphiquement les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Tracer le tableau de variations de $f$.




**Exercice 4 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)**
Donner, s'il y a lieu, une interprétation graphique pour la courbe $\mathscr{C}_f$ des limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$

**Exercice 5 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)**
Compléter les phrases suivantes :

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation ................ est ................ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en ................
2. Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation ................ est ................ à la courbe $\mathscr{C}_f$.
3. Si la droite d'équation $y = -5$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$, alors ................
4. Si la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$, alors ................

**Exercice 6 (Limites et asymptotes – calculs)**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 3$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$ et en donner l'équation.

**Exercice 7 (Limites et asymptotes – calculs)**
Déterminer les limites suivantes.
Pour les limites en un réel, si nécessaire déterminer la limite à gauche et la limite à droite.
Dans chaque cas où il y en a une, donner l'équation de l'asymptote correspondante.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+1-\dfrac{1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\mathrm{e}^x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-1$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)(\mathrm{e}^x-1)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{2-x}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{2-x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{100}{1+9\,\mathrm{e}^{-0{,}3x}}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\,\mathrm{e}^x-2x+1$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2x-3)$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2(x+2)$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{x^2}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\,\mathrm{e}^x$
13. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{x}+1\right)(\mathrm{e}^x-3)$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2+3}$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \left(-\dfrac{2}{x^2}+1\right)(x-1)$
16. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\,\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$
17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x+1}$
18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x+1}$
19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+3}{x-1}$
20. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\mathrm{e}^{-0{,}5x}$
21. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$
22. $\lim\limits_{t\to+\infty} 2{,}8(1-\mathrm{e}^{-0{,}3t})$
23. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1)(\mathrm{e}^{-x}-1)$

**Exercice 8 (Limites par comparaison)**
Pour chacune des fonctions $f$ vérifiant l'inégalité indiquée, déterminer sa limite en $+\infty$.

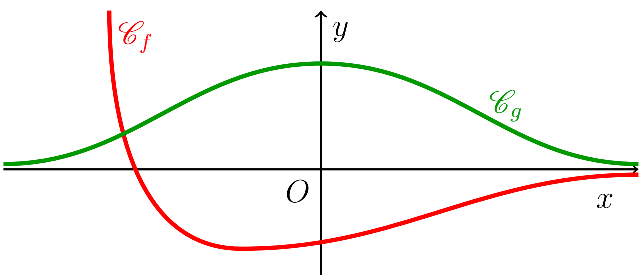
1. Pour tout réel $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $0 < f(x) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
3. Pour tout réel $x$, $f(x) \geqslant 2\,\mathrm{e}^x-3$.
4. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-2x} \leqslant f(x)-1 \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

**Exercice 9 (Limites par comparaison – facultatif)**
Le but de cet exercice est de démontrer la limite du cours : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
On considère la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

1. Étudier le sens de variation de $f$ sur $[0;+\infty[$.
2. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x > x$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$.

**Exercice 10 (Limites avec formes indéterminées)**
Le graphique ci-dessous donne les courbes représentatives de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et à la courbe $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
On admet enfin que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

1. Donner les autres limites de $f$ et $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer lorsque cela est possible les limites suivantes :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-g(x)$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-f(x)$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\times g(x)$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$



**Exercice 11 (Limites avec formes indéterminées)**
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+x^2-3x-1$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x+1}{x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x+1}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3-2x^2+5x-2$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2+x-1}{2x+3}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-1}{2x^2+3}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,\mathrm{e}^{0,5x}}{\mathrm{e}^{0,5x}+1}$

**Exercice 12 (Primitives)**
Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle de la forme $y = f(x)$, ce qui revient à déterminer une primitive de $f$.

1. $f(x) = -1$
2. $f(x) = 2x+3$
3. $f(x) = -x^2+2x-1$
4. $f(x) = -2x^2+3x-1$
5. $f(x) = -3\,\mathrm{e}^x+2$
6. $f(x) = 1-x+2\,\mathrm{e}^x$
7. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$
8. $f(x) = 5x-\dfrac{3}{x^2}$
9. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}-3$
10. $f(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{x}}+2\,\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{2}$
11. $f(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x+1}$
12. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
14. $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+2x}$
15. $f(x) = 2(x-\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^{-x})$

**Exercice 13 (Primitives)**
Dans chaque cas, déterminer la primitive $F$ de $f$ vérifiant la contrainte.

1. $f(x) = x+\mathrm{e}^{-x}$ et $F(0) = -1$.
2. $f(x) = 3x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et $F(1) = 0$.
3. $f(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^{x^3}+1$ et $F(0) = -2$.
4. $f(x) = -x\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $F(1) = 1$.
5. $f(x) = -2(x+1)(x^2+2x-3)$ et $F(0) = 2$.

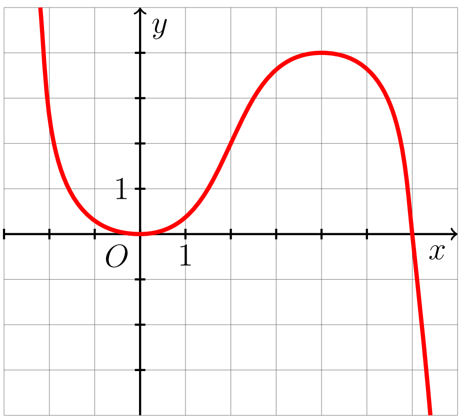
**Exercice 14 (Primitive et fonction – variation et signe)**
On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

1. Dresser le tableau de variations de $F$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $F$ est telle que $F(1) = -3$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de $F$ au point d'abscisse 1.

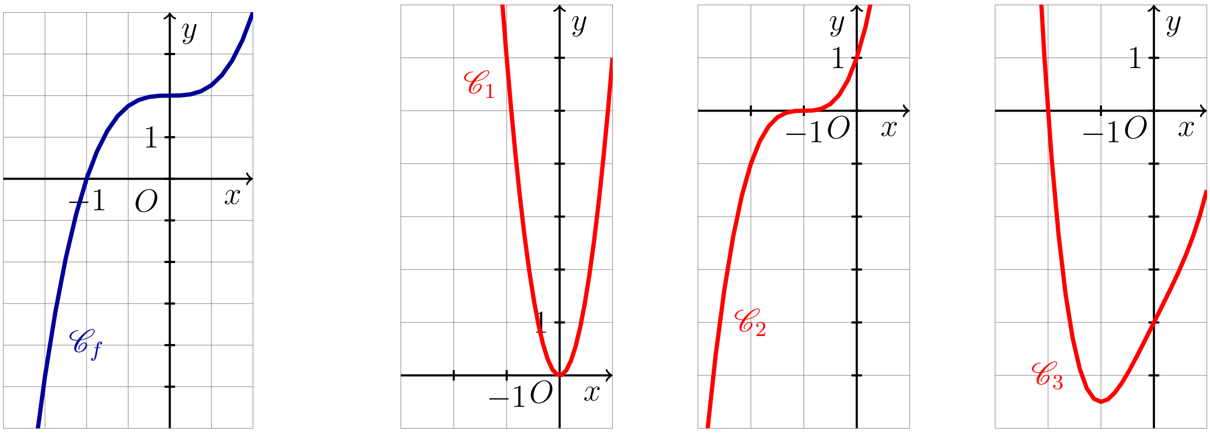
**Exercice 15 (Primitive et fonction – variation et signe)**



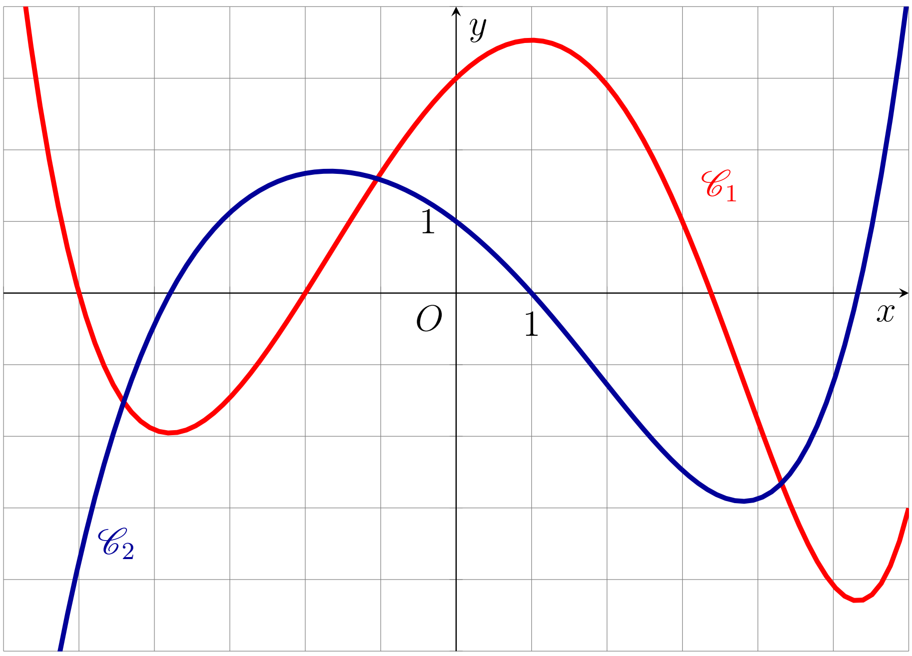

La courbe ci-contre est celle d'une fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les variations de $F$.
2. En quelles valeurs la courbe de $F$ admet-elle des tangentes horizontales ?
3. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la coure de $F$ au point d'abscisse 2 ?

**Exercice 16 (Primitive et fonction – variation et signe)**
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous à gauche est celle d'une fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Une des trois courbes suivantes représente une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
Une autre de ces mêmes trois courbes représente la dérivée de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer ces deux courbes, en expliquant les choix effectués.




**Exercice 17 (Primitive et fonction – variation et signe)**
On a représenté ci-dessous les courbes représentatives d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-6; 6]$ et de l'une de ses primitives $F$. Identifier, en argumentant, la courbe de $f$ et celle de $F$.




**Exercice 18 (Équations différentielles $y' = ay'$)**
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y$
2. $y' = -y$
3. $4y' + 3y = 0$
4. $-3y + 5y' = 0$
5. $2y' - 3y = y' + y$
6. $2(y' + 2y) = 3y' + 5y$

**Exercice 19 (Équations différentielles $y' = ay'$)**
Dans chaque cas, déterminer la solution $f$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition donnée.

1. $y' + y = 0$ et $f(0) = 1$.
2. $3y' - y = 0$ et $f(-1) = 3$.

**Exercice 20 (Équations différentielles $y' = ay'$)**
On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 3y$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E)$.
2. À l'aide de la calculatrice, tracer l'allure des solutions de $(E)$.
   On choisira différentes valeurs de $k$ permettant d'obtenir toutes les allures possibles.
3. Déterminer la solution $f$ de $(E)$ qui vérifie $f(0) = -2$.
4. Déterminer la solution $g$ de $(E)$ dont la courbe représentative passe par le point $A(-1; 3)$.

**Exercice 21 (Équations différentielles $y' = ay'$)**
On injecte à un malade une dose de 2 $\text{cm}^3$ d'un médicament. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang par une fonction $f$, dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifiant, pour tout réel $t \geqslant 0$ :

$$f'(t) = -0{,}08f(t)$$

où $f(t)$ représente la quantité de médicament présente dans le sang, exprimée en $\text{cm}^3$, $t$ heures après l'injection.

1. Déterminer l'expression de $f(t)$ en fonction de $t$.
2. Déterminer, à $10^{-2}$ près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.

**Exercice 22 (Équations différentielles $y' = ay'$ – facultatif)**
Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
La fonction $f$ vérifie les propriétés suivantes :

- $f$ est solution d'une équation différentielle $y' = ay$, où $a$ est un nombre réel ;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0; 2)$ passe par le point $B(-3; 1)$.

1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire la valeur de $a$.
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$.

**Exercice 23 (Équations différentielles $y' = ay + b$)**
Résoudre les équations différentielles suivantes (on rappelle qu'il faut commencer par chercher une fonction constante solution) :

1. $y' = -3y + 2$
2. $y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}$
3. $2y' - 3y = 1$
4. $-y' + y - 2 = 0$

**Exercice 24 (Équations différentielles $y' = ay + b$)**
Résoudre les équations différentielles suivantes puis déterminer la solution $f$ vérifiant la condition indiquée.

1. $y' = 2y - 5$ et $f(0) = 3$
2. $5y' - 3y = 2$ et $f(1) = -1$
3. $y' + 2y = 3$ et $f(0) = -3$
4. $y' - 5y + 10 = 0$ et $f(1) = 0$
5. $2y' + y = -3$ et $f(0) = 2$

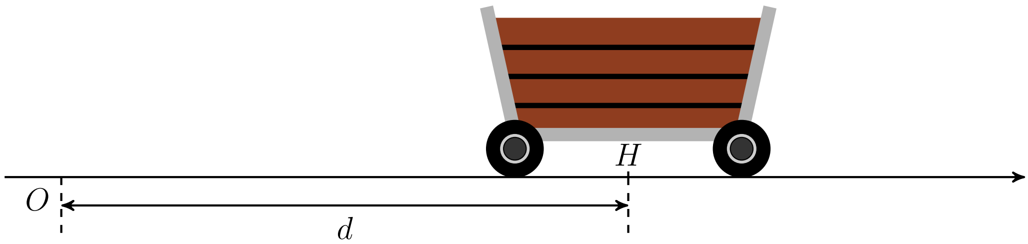
**Exercice 25 (Équations différentielles $y' = ay + b$)**
À l'instant $t = 0$, on place 20 grammes d'une substance soluble dans de l'eau. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on note $f(t)$ la quantité de substance dissoute, exprimée en gramme, au bout de $t$ minutes. On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}14y + 2{,}8$.

1. Déterminer le nombre réel $\alpha$ tel que la fonction $u$ définie par $u(t) = \alpha$ soit solution de $(E)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.
3. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de $t$.
4. Déterminer, au gramme près, la quantité de substance dissoute au bout de dix minutes.

**Exercice 26 (Équations différentielles $y' = ay + b$ – facultatif)**
La température de refroidissement d'un objet, fabriqué industriellement, est modélisée par une fonction $f$, où, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t)$ représente la température de l'objet, exprimée en degré Celsius, à l'instant $t$, exprimé en heures. La fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{2}y = 10$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E)$.
2. La température initiale de l'objet est 220 °C. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de $t$.
3. (a) Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   (c) Interpréter les résultats précédents dans le contexte de l'exercice.

**Exercice 27 (Facultatif)**
Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. La position du chariot est repérée par la distance d, en mètre, du point $H$, au-dessus duquel se trouve le chariot, à l'origine $O$ du repère en fonction du temps $t$, exprimé en seconde.




Les lois de Newton permettent de montrer que la fonction $d$ vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$, la relation : $200d''(t) + 25d'(t) = 50$.

1. Pour $t \geqslant 0$, on note $v(t)$ la vitesse du chariot à l'instant $t$. Rappel : pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = d'(t)$.
   Montrer que la fonction $v$ est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}125y + 0{,}25$.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle $(E)$.
   (b) On suppose que $v(0) = 0$. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, en fonction de t.
   (c) Calculer $V = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$. Interpréter cette valeur.
3. (a) Que représente la fonction $d$ pour la fonction $v$ ?
   (b) On suppose que $d(0) = 0$. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $d(t) = 2t - 16 + 16\,\mathrm{e}^{-0.125t}$.
   (c) Calculer la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes (à $10^{-2}$ m près).

**Exercice 28 (Facultatif)**
Au début d'une épidémie, on constate que 1% de la population est contaminée. Pour $t \in [0; 30]$, on note $f(t)$ la fréquence de personnes touchées par la maladie après $t$ jours. On a donc $f(0) = 0{,}01$. On admet que la fonction $f$ est dérivable et strictement positive sur $[0; 30]$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = 0{,}05y(1 - y)$.

1. Soit la fonction $g$ définie sur $[0; 30]$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
   (a) Calculer $g(0)$.
   (b) Montrer que $g$ est solution de l'équation différentielle $(F) : y' = -0{,}05y + 0{,}05$.
   (c) Résoudre $(F)$. En déduire l'expression de $g(t)$ en fonction de $t$.
2. (a) Montrer que, pour tout réel $t \in [0; 30]$ : $f(t) = \dfrac{1}{99\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 1}$.
   (b) Calculer, à l'entier près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.