Fonction logarithme

Exercice 1 (Limites)
Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}+\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)(4-\ln(x))$
4. $\lim\limits_{x\to 0} -2\ln(x)-1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(3x)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} -x+\ln(2x)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\ln(6x)$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x-\ln(x)$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)$
10. $\lim\limits_{x\to 0} x+\ln(x)$
11. $\lim\limits_{x\to 0} 3-\ln(x)$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x+1}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{10}{\ln(x)}$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3\ln(x)$
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-4\ln(x)$
17. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(6-2\ln(x))$

Exercice 2 (Équations de base – exponentielle)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x=10$
2. $\mathrm{e}^x-4=0$
3. $\mathrm{e}^x+5=0$
4. $\mathrm{e}^x-5=0$
5. $2\,\mathrm{e}^x-6=8$
6. $4\,\mathrm{e}^x-2=0$
7. $2\,\mathrm{e}^x-3=0$
8. $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x-5)=0$
9. $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x-3)=0$
10. $\mathrm{e}^{x+1}=3$
11. $\mathrm{e}^{-2x+1}=10$
12. $\mathrm{e}^{2x}+3=0$

Exercice 3 (Équations de base – logarithme)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en faisant attention à l'ensemble de définition de celles-ci :

1. $\ln x=4$
2. $6\ln x+13=1$
3. $\ln(x)-5=0$
4. $\ln(x)-2=0$
5. $\ln(x)=10$
6. $5\ln(x)-8=0$
7. $\ln(x+1)=2$
8. $\ln(x-1)=0$
9. $2\ln(x+3)=10$
10. $\ln(x+1)=5$
11. $\ln(2x)=0$
12. $\ln(1-x)=3$
13. $(x+2)\ln(x)=0$
14. $(\ln(x)-1)(\ln(x)+1)=0$
15. $(x-2)\ln(x)=0$
16. $(\ln(x)+1)(\ln(x)-3)=0$
17. $\ln(x)\times\ln(x+2)=0$

Exercice 4 (Inéquations de base – exponentielle)
Résoudre les inéquations suivantes (sans oublier de donner l'ensemble de solutions) :

1. $\mathrm{e}^x<5$
2. $\mathrm{e}^x>4$
3. $\mathrm{e}^x+1\leqslant 0$

Exercice 5 (Inéquations de base – logarithme)
Résoudre les inéquations suivantes en faisant attention à leur ensemble de définition (et sans oublier de donner l'ensemble de solutions) :

1. $\ln(x) \leqslant 3$
2. $\ln(x) + 3 \leqslant 0$
3. $\ln(x) > 5$
4. $\ln(x+1) \geqslant 3$
5. $\ln(x-1) < 2$

Exercice 6 (Inéquations de base)
Étudier le signe des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^x - 6$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = 4 - 3\,\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = (\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 3)$ sur $\mathbb{R}$.
4. $f(x) = (2x+1)(\mathrm{e}^x - 5)$ sur $\mathbb{R}$.
5. $f(x) = (2x-5)(\mathrm{e}^x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.
6. $f(x) = \ln(x) \times (\ln(x) + 1)$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 7 (Dérivation)
Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = (2x+1)\ln x$
2. $f(x) = \ln(2x-3)$
3. $f(x) = 3\ln x - 1$
4. $f(x) = 5 - 2\ln x$
5. $f(x) = 2\ln x - x + \dfrac{1}{x}$
6. $f(x) = x^2 - \ln x$
7. $f(x) = \ln(3x)$
8. $f(x) = 4\ln(5x)$
9. $f(x) = \ln(2x) - 1$
10. $f(x) = \ln(2x-1)$
11. $f(x) = x\ln x - x$
12. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
13. $f(x) = \mathrm{e}^x \times \ln x$
14. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$

Exercice 8 (Primitives)
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (sans se soucier des ensembles de définition) :

1. $f(x) = x^2 + 5x + 7 - \dfrac{2}{x}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{2x-1}$
3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - 4x$
5. $g(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$
6. $h(x) = \dfrac{2}{x} - x^2 + 1$
7. $f(x) = 2x - \dfrac{5}{x}$
8. $g(x) = \dfrac{3}{3x+1}$
9. $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{5x+3}$
11. $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Exercice 9 (Primitives)
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x + 3 + 4\ln x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = x(x - 1 + 4\ln x)$ est une primitive de f.

Exercice 10 (Primitives – facultatif)
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En remarquant que, pour $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$, déterminer une primitive de f.
3. Déterminer la primitive de f s'annulant en e.

Exercice 11 (Étude de fonction)
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = x$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur $]0;+\infty[$.
2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $h(x) = f(x) - x$.
   (a) Étudier le signe de h sur $]0;+\infty[$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ ?

Exercice 12 (Étude de fonction)

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}$.
   Quelle interprétation graphique peut-on en déduire ?
3. Déterminer le tableau de signe de la fonction f.
4. Calculer $f'(x)$.
   En déduire les variations de f.

Exercice 13 (Étude de fonction)

Pour chacune des fonctions f suivantes définies sur $]0;+\infty[$:

- Calculer $f'(x)$;
- Étudier le signe de $f'(x)$;
- Établir le tableau de variations de f.

1. $f(x)=4x-\ln x$
2. $f(x)=2x+\ln x$
3. $f(x)=x^2-2\ln x$
4. $f(x)=4\ln x-x+\dfrac{3}{x}$
5. $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+6x-5\ln x$
6. $f(x)=x-\dfrac{8}{x}-6\ln x$

Exercice 14 (Étude de fonction – facultatif)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln x-x$.

1. (a) Démontrer que, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1-x}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   (c) Dresser alors le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
2. (a) Déterminer le maximum de f sur $]0;+\infty[$.
   En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   (b) En déduire que, pour tout réel $x>0$, on a $\ln x<x$.
   (c) Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 15 (Étude de fonction – facultatif)

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(1+x)$.

1. (a) Justifier que f est définie sur $]1;+\infty[$.
   (b) Étudier les limites de f aux bornes du domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variations de la fonction f.
3. Étudier la convexité de la fonction f.
4. (a) Déterminer l'équation de la tantente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier la position relative de la tangente T et la courbe représentative de f.
   (c) Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.

Exercice 16 (Modélisation)
Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs. On considère la fonction f définie sur $[1;9]$ par : $f(x) = 0{,}5x^2 - 7x + 14 + 6\ln x$.
On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaine d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. (a) Montrer que, pour tout réel $x \in [1;9]$: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;9]$.
   (b) Donner un encadrement au centième près de α.
   (c) On considère l'algorithme ci-dessous.

```
x←1
y←7,5
Tant que y>5 Faire
  | x←x+0,01
  | y←0,5x² − 7x + 14 + 6 ln x
Fin Tant que
```

   À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable x ?
3. Pour quelle quantité de pneus le coût moyen annuel de fabrication est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

Exercice 17 (Modélisation)
Sur une portion de 6 kilomètres du boulevard périphérique, le trafic peut être perturbé entre 7 h et 11 h du matin. Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.
On modélise l'évolution du trafic à l'aide de la fonction f définie sur $[1;5]$ par : $f(t) = \dfrac{22\ln t}{t} + 4$.
Le nombre $f(t)$ est alors le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant t exprimé en heure. Il est 7 h du matin à l'instant $t = 1$.
Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres, il indique « trafic perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

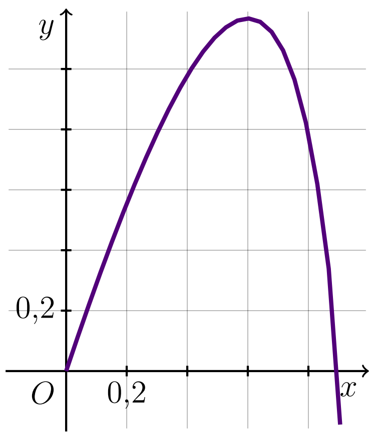
1. Étudier les variations de f sur $[1;5]$ et dresser son tableau de variations.
2. En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7 h 10 min et qu'il en est ainsi jusqu'à 11 h.

Exercice 18 (Modélisation)
Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques. On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est, en euro : $f(x) = \dfrac{x + 2 - \ln x}{x}$.

1. (a) Montrer que, pour tout réel $x \in [1;25]$: $f'(x) = \dfrac{\ln x - 3}{x^2}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur $[1;25]$.
   (c) Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.
2. Justifier qu'il est possible que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 €.
3. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

Exercice 19 (Modélisation)

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. Dans ce cas, le modèle parabolique usuel pour la trajectoire n'est pas adapté. On modélise le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;1[$ par : $f(x) = 5x + 2\ln(1-x)$
où x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètre.



1. (a) Montrer que, pour tout réel $x \in [0;1[$: $f'(x) = \dfrac{3-5x}{1-x}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f.
   (c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?
2. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0;1[$: 0 et un réel $\alpha > 0{,}8$.
   Donner une valeur approchée de α à 0,001 près.
   (b) Interpréter la valeur de α dans le contexte.

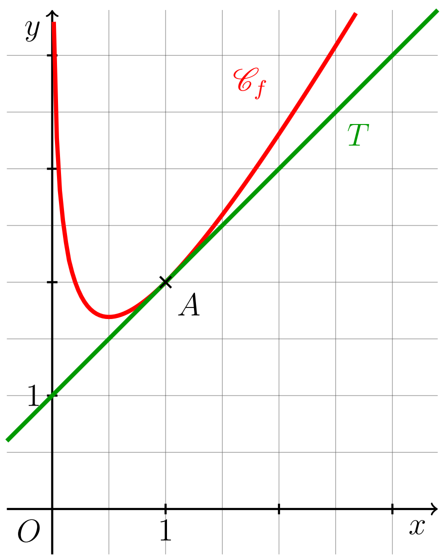
Exercice 20 (Modélisation)

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en année) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur $]0;1[$ par : $f(x) = 30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)$
où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en année.

1. Étudier le sens de variation de f sur $]0;1[$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc pour que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Exercice 21 (Modélisation)

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = ax + b\ln x$,
où a et b sont deux réels inconnus.
La courbe passe par le point A et admet en ce point la tangente T.



1. (a) Lire graphiquement $f(1)$.
   (b) En déduire la valeur du nombre a.
2. (a) Montrer que $f'(x) = 2 + \dfrac{b}{x}$.
   (b) Lire graphiquement $f'(1)$.
   (c) En déduire la valeur du nombre b.
3. Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 22 (Relation fonctionnelle)
Soient a et b deux réels strictement positifs. Lesquelles des égalités suivantes sont justes ?

1. $\ln(a+b) = \ln a \times \ln b$
2. $\ln(a^2) = 2\ln a$
3. $\ln(2a) = \ln 2 + \ln a$
4. $\ln(\mathrm{e}\,a) = 1 + \ln a$

Exercice 23 (Relation fonctionnelle)
Démontrer les égalités suivantes :

1. $\ln 3 + \ln 9 + 3\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$
2. $2\ln 4 + 3\ln 2 + 6\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2$
3. $3\ln 2 + \ln(\mathrm{e}^4) + 5\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2$
4. $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x^2+x)$
5. $\ln(x^3) - \ln(x) = 2\ln x$
6. $\ln 4 + 3\ln 2 - \ln 8 = 2\ln 2$
7. $3\ln 7 - 2\ln 49 = -\ln 7$

Exercice 24 (Relation fonctionnelle)
Écrire les expressions suivantes sous la forme d'un seul logarithme.

1. $A = 2\ln 5 + 3\ln 2 - \ln 16$
2. $B = -3\ln 3 + \ln 9 + 1$
3. $C = 4\ln 3 + 2\ln 5 + 4\ln 1$
4. $D = 2\ln 4 - 3\ln 3$

Exercice 25 (Relation fonctionnelle)
Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\ln 2$.

1. $A = \ln 8 - \ln 16$
2. $B = \ln \dfrac{1}{32}$
3. $C = \ln(2^3) + 3\ln 4$
4. $D = 4\ln(\mathrm{e}^2) - \mathrm{e}^{\ln 8} + \ln 2$

Exercice 26 (Relation fonctionnelle)
Écrire les expressions suivantes sous forme de somme de logarithmes de nombres premiers (décomposer tous les produits) :

1. $A = \ln\left(\dfrac{3\times 5}{7}\right)$
2. $B = \ln(5^4 \times 2^3)$
3. $C = \ln\left(\dfrac{3^4\times 5^2}{7^3}\right)$

Exercice 27 (Relation fonctionnelle – facultatif)

1. Démontrer la formule du cours suivante : $\ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x$ (pour $x > 0$).
   Pour cela, on pourra utiliser le fait que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
2. Utiliser cette formule pour démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{8} = 2\ln 2$
   (b) $2\ln\sqrt{3} + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$
   (c) $\ln\sqrt{\mathrm{e}^1} + 4 - \ln(\mathrm{e}^3) = 1{,}5$

Exercice 28 (Relation fonctionnelle – facultatif)
Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout nombre réel $k > 0$, l'équation $x^n = k$ admet pour unique solution le nombre $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln k}$ dans $[0; +\infty[$.

Exercice 29 (Relation fonctionnelle – facultatif)
On considère l'équation suivante dans $]0; +\infty[$: $\ln(x^2) - \ln\left(\dfrac{x^5}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2 = \ln(2x) + 5$.

L'affirmation suivante est-elle vraie ? « $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ est l'unique solution de cette équation dans $]0; +\infty[$. » Justifier.

Exercice 30 (Équations avec relation fonctionnelle)
Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x^2) + 4\ln x - 1 = 0$ dans $]0; +\infty[$.
2. $\ln(x-1) + \ln(x-3) = 0$ dans $]3; +\infty[$.

Exercice 31 (Rangs de suites)
Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier naturel n qui satisfait l'inégalité sans utiliser de tableau de valeurs.

1. $1{,}25^n > 100$
2. $1{,}1^n \geqslant 500$
3. $0{,}8^n \leqslant 0{,}02$
4. $0{,}5^n < 0{,}001$
5. $1{,}1^n > 10^3$
6. $0{,}9^n \leqslant 10^{-5}$
7. $5 + 3 \times 2^n \geqslant 1\ 000$.
8. $5 + 3 \times 0{,}5^n \leqslant 5{,}01$
9. $5 - 3 \times 0{,}5^n \geqslant 4{,}999$

Exercice 32 (Rangs de suites – facultatif)
Le musée du quai Branly à Paris a accueilli 1,26 million de visiteurs en 2018, soit une hausse de 7% par rapport à 2017. On suppose que cette évolution se maintient et on s'intéresse au nombre d'entrées en $2018 + n$ où n est un entier naturel.

1. Déterminer le nombre d'entrées en 2019 et 2020.
2. (a) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $1{,}26 \times 1{,}07^n > 2$.
   (b) Que signifie le résultat pour le musée ?
3. Dans le même temps, en 2018, le musée du Louvre a battu son record de fréquentation en accueillant 10,2 millions de visiteurs. Déterminer en quelle année le musée du quai Branly devrait accueillir pour la première fois plus de 10 millions de visiteurs.
   Que peut-on penser du résultat obtenu ?

Exercice 33 (Rangs de suites – facultatif)
Voici un extrait d'un article, publié en avril 2019, de futura-sciences.com :

> Selon des estimations, les glaciers alpins s'étendaient sur un peu moins de 340 km^2 au milieu des années 1980. À la fin des années 2000, en revanche, cette superficie avait fortement diminué, atteignant 275 km^2. Soit une baisse de 20% environ en vingt-cinq ans.

1. Vérifier l'affirmation contenue dans la dernière phrase.
2. Soit t le taux (positif, pas en pourcentage) de diminution moyen annuel de la fonte des glaciers sur ces 25 ans.
   (a) Justifier que $(1-t)^{25} = 0{,}8$.
   (b) Montrer que $t \simeq 0{,}889\%$.
3. Dans le même article, on peut lire :

   « Les glaciers alpins risquent de fondre à 90% d'ici 2100. »

   Que peut-on penser de cette affirmation ?