Fonction logarithme
Correction partielle

∽

Exercice 27

1. On a, par équivalences :

$$\begin{aligned}\sqrt{x}^2 = x &\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x}^2) = \ln(x)\\ &\Leftrightarrow 2\ln(\sqrt{x}) = \ln(x)\\ &\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)\end{aligned}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{8}) &= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 8\\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(2^3)\\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\times 3\ln 2\\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}\ln 2\\ &= \frac{4}{2}\ln 2\\ &= 2\ln 2\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}2\ln\sqrt{3} + \ln\left(\frac{1}{3}\right) &= 2\times\frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3\\ &= \ln 3 - \ln 3\\ &= 0\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^1}\right) + 4 - \ln\left(\mathrm{e}^3\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^1\right) + 4 - 3\\ &= \frac{1}{2}\times 1 + 1\\ &= \frac{3}{2}\\ &= 1{,}5\end{aligned}$$

Exercice 28

On a, étant donné que $k > 0$:

$$\begin{aligned}x^n = k &\Leftrightarrow \ln(x^n) = \ln k \qquad \text{(on a le droit d'appliquer le logarithme aux nombres positifs)}\\ &\Leftrightarrow n\ln x = \ln k\\ &\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{n}\ln k\\ &\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln k}\end{aligned}$$

On a bien trouvé la solution donnée, et c'est la seule (grâce au raisonnement par équivalences de la résolution).
On aurait pu également penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, mais cela ne donne pas la solution.

Exercice 29
On veut résoudre l'équation $\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2 = \ln(2x) + 5$ dans $]0;+\infty[$.
Pour cela, on raisonne par équivalences, avec l'idée de départ de tout écrire sous forme d'un seul logarithme de chaque côté pour pouvoir les supprimer :

$$\begin{aligned}
\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{\mathrm{e}}\right) + \ln 2 = \ln(2x) + 5 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2 \times 2}{\frac{x^5}{\mathrm{e}}}\right) = \ln(2x) + \ln(\mathrm{e}^5) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2 \times 2 \times \mathrm{e}}{x^5}\right) = \ln(2x \times \mathrm{e}^5) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x^2\,\mathrm{e}}{x^5}\right) = \ln(2x\,\mathrm{e}^5) \\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2\,\mathrm{e}}{x^5} = 2x\,\mathrm{e}^5 \\
&\Leftrightarrow \frac{2\,\mathrm{e}}{x^3} = 2x\,\mathrm{e}^5 \\
&\Leftrightarrow 2\,\mathrm{e} = 2x^4\,\mathrm{e}^5 \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^5} = x^4 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}^4} = x^4 \\
&\Leftrightarrow x^4 = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^4
\end{aligned}$$

Or cette équation n'a effectivement qu'une seule solution réelle positive : $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
Il est à noter qu'elle a une solution négative $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$, mais qui n'est pas dans l'ensemble de définition de l'équation.
L'affirmation est donc vraie.
De manière un peu plus rigoureuse, l'équation peut encore se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
x^4 = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^4 &\Leftrightarrow x^4 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x^2 - \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right)\left(x^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left(x + \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left(x^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x - \frac{1}{\mathrm{e}} = 0 \text{ ou } x + \frac{1}{\mathrm{e}} = 0 \text{ ou } x^2 + \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\mathrm{e}} \text{ ou } x^2 = -\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2
\end{aligned}$$

La première équation donne notre solution, la seconde donne la solution négative, et la troisième n'a pas de solution (car un carré ne peut pas être strictement négatif). Il n'y a donc bien qu'une seule solution dans $]0;+\infty[$.

Exercice 30

1. On a :

$$\begin{aligned}\ln(x^2)+4\ln x-1=0 &\Leftrightarrow \ln(x^2)+\ln(x^4)-\ln(\mathrm{e})=0\\ &\Leftrightarrow \ln(x^2\times x^4)=\ln(\mathrm{e})\\ &\Leftrightarrow x^6=\mathrm{e}\\ &\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\ln \mathrm{e}}\\ &\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\ln(x-1)+\ln(x-3)=0 &\Leftrightarrow \ln((x-1)(x-3))=\ln 1\\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=1\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+3=1\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+2=0\end{aligned}$$

   On trouve une équation du second degré.
   On calcule le discriminant : $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 2=16-8=8>0$.
   On trouve deux solutions : $x_1=\dfrac{4-\sqrt{8}}{2}=2-\sqrt{2}$ et $x_2=2+\sqrt{2}$.
   Seule $x_2=2+\sqrt{2}$ est supérieure à 3 (l'ensemble de définition de l'équation est $]3;+\infty[$).
   Donc l'équation n'a qu'une solution : $x_2=2+\sqrt{2}$.

Exercice 31

Pour ce genre d'exercice, on a une inconnue en exposant. Pour résoudre les inéquations, on isole la puissance puis on applique le logarithme, puisqu'il permet d'accéder à l'exposant.

Il faut faire attention, lors de la division finale, au signe du logarithme qui peut changer le sens de l'inéquation.

Les trois dernières questions sont celles dont la rédaction est la plus détaillée.

1. On résout :

$$\begin{aligned}1{,}25^n>100 &\Leftrightarrow n\ln(1{,}25)>\ln(100)\\ &\Leftrightarrow n>\frac{\ln(100)}{\ln(1{,}25)} &&(\ln(1{,}25)>0 \text{ car } 1{,}25>1)\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln(100)}{\ln(1{,}25)}\simeq 20{,}64$, donc le plus petit entier n est 21.

2. On résout :

$$\begin{aligned}1{,}1^n\geqslant 500 &\Leftrightarrow n\ln(1{,}1)\geqslant\ln(500)\\ &\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(500)}{\ln(1{,}1)} &&(\ln(1{,}1)>0 \text{ car } 1{,}1>1)\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln(500)}{\ln(1{,}1)}\simeq 65{,}2$, donc le plus petit entier n est 66.

3. On résout :

$$\begin{aligned} 0{,}8^n \leqslant 0{,}02 &\Leftrightarrow n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}02) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}8)} && (\ln(0{,}8) < 0 \text{ car } 0{,}8 < 1) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}8)} \simeq 17{,}53$, donc le plus petit entier n est 18.

4. On résout :

$$\begin{aligned} 0{,}5^n < 0{,}001 &\Leftrightarrow n\ln(0{,}5) < \ln(0{,}001) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5)} && (\ln(0{,}5) < 0 \text{ car } 0{,}5 < 1) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5)} \simeq 9{,}97$, donc le plus petit entier n est 10.

5.

6.

7. On résout :

$$\begin{aligned} 5 + 3 \times 2^n \geqslant 1\ 000 &\Leftrightarrow 2^n \geqslant \frac{995}{3} && (\text{on isole } 2^n) \\ &\Leftrightarrow \ln(2^n) \geqslant \ln\left(\frac{995}{3}\right) && (\text{on applique le logarithme}) \\ &\Leftrightarrow n\ln(2) \geqslant \ln\left(\frac{995}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{995}{3}\right)}{\ln(2)} && (\ln 2 > 0 \text{ car } 2 > 1) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{995}{3}\right)}{\ln(2)} \simeq 8{,}37$, donc il faut $n \geqslant 9$: le plus petit entier n qui convient est 9.

8. On résout :

$$\begin{aligned} 5 + 3 \times 0{,}5^n \leqslant 5{,}01 &\Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant \frac{0{,}01}{3} \\ &\Leftrightarrow \ln(0{,}5^n) \leqslant \ln\left(\frac{0{,}01}{3}\right) && (\text{on applique le logarithme}) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0{,}5) \leqslant \ln\left(\frac{0{,}01}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{3}\right)}{\ln(0{,}5)} && (\ln(0{,}5) < 0 \text{ car } 0{,}5 < 1) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}01}{3}\right)}{\ln(0{,}5)} \simeq 8{,}23$, donc il faut $n \geqslant 9$: le plus petit entier n qui convient est 9.

9. On résout :

$$\begin{aligned}
5-3\times 0{,}5^n \geqslant 4{,}999 &\Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant \frac{0{,}001}{3} && \text{(attention aux signes !)}\\
&\Leftrightarrow n\ln(0{,}5) \leqslant \ln\left(\frac{0{,}001}{3}\right) && \text{(logarithme)}\\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{0{,}001}{3}\right)}{\ln(0{,}5)} && (\ln(0{,}5)<0)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}001}{3}\right)}{\ln(0{,}5)} \simeq 11{,}55$, donc il faut $n \geqslant 12$: le plus petit entier n qui convient est 12.

Exercice 32

1. Augmenter de 7% revient à multiplier par 1,07. Ainsi :
   Pour 2019 : $1{,}26 \times 1{,}07 = 1{,}3482$ (millions de visiteurs)
   Pour 2020 : $1{,}3482 \times 1{,}07 \simeq 1{,}44$ (millions de visiteurs)
2. (a) On résout :

$$\begin{aligned}
1{,}26\times 1{,}07^n > 2 &\Leftrightarrow 1{,}07^n > \frac{2}{1{,}26}\\
&\Leftrightarrow n\ln(1{,}07) > \ln\left(\frac{2}{1{,}26}\right)\\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{2}{1{,}26}\right)}{\ln(1{,}07)} && (\ln(1{,}07)>0 \text{ car } 1{,}07>1)
\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{1{,}26}\right)}{\ln(1{,}07)} \simeq 6{,}82$.
   Donc la plus petite valeur de l'entier n est 7.

   (b) Il s'agit du nombre d'années nécessaires pour dépasser les 2 millions de visiteurs.
3. Cela revient à résoudre : $1{,}26 \times 1{,}07^n > 10$.

   On trouve, par une résolution similaire, qu'il faut $n > \dfrac{\ln\left(\frac{10}{1{,}26}\right)}{\ln(1{,}07)} \simeq 30{,}6$ On considère donc qu'il faut 31 ans, ce qui mène à l'année $2018+31=2049$.
   Le résultat est peu probable (sans compter que le musée ne pourrait sans doute pas accueillir autant de monde). Une augmentation constante en pourcentage mène à des croissances exponentielles non réalistes (valeurs tendant vers l'infini).

Exercice 33

1. Calcul simple de taux de variation (en pourcentage) :
   $\dfrac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 = \dfrac{275-340}{340} \times 100 \simeq -19{,}12$. On n'est donc effectivement pas loin d'une baisse de 20%.
2. (a) On estime égale à 20% la baisse sur 25 ans. Le coefficient multiplicateur (global) sur les 25 ans est donc : $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$.
   Cela signifie que pour obtenir la valeur au bout des 25 ans à partir de la valeur initiale, on a multiplié par 0,8.

Soit t le taux (pas en pourcentage mais en valeur positive) de baisse annuel. Le coefficient multiplicateur à appliquer chaque année est donc $1-t$, et on l'applique 25 années donc cela revient à multiplier 25 fois par $1-t$.
Autrement dit, pour obtenir la valeur au bout des 25 ans à partir de la valeur initiale, on a multiplié par $(1-t)^{25}$.
Le coefficient multiplicateur global 0,8 a alors la même valeur que $(1-t)^{25}$.
Ainsi, $(1-t)^{25} = 0{,}8$

(b) On a :

$$\begin{aligned}(1-t)^{25} = 0{,}8 &\Leftrightarrow 1-t = \mathrm{e}^{\frac{1}{25}\ln(0{,}8)}\\ &\Leftrightarrow t = 1-\mathrm{e}^{\frac{1}{25}\ln(0{,}8)} \simeq 0{,}00889\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur en pourcentage de t il suffit de multiplier par 100.
On trouve donc bien une baisse annuelle de 0,889%.

Remarque si on note t la valeur (positive du) taux d'évolution en pourcentage annuel, alors on a en fait $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)^{25} = 0{,}8$. En résolvant cette équation on trouve directement le nombre 0,889 demandé.

3. Le raisonnement de l'auteur de l'article semble être que si, en 25 ans, on a diminué de 20%, alors en 2100, soit après une période de 120 ans, la diminution serait de $20 \times \dfrac{120}{25}$ (on multiplie le taux d'évolution par le nombre de périodes de 25 ans), ce qui donne 96, donc les 90% de l'article (on nous fait cadeau des 6%...). Heureusement que la période n'était que de 120 ans, car sinon on dépassait les 100% !
Bien évidemment, ce raisonnement, bien que fréquent (car intuitif), **est faux (et il est important de le savoir) !**
Avec les taux d'évolution, il ne faut pas raisonner avec les pourcentages, mais avec les coefficients multiplicateurs (c'est ce qui a été vu en seconde en mathématiques).
Voici comment corriger l'erreur :
Si l'on reste avec l'usage du taux annuel, et que l'on applique ce taux 120 ans, d'après les explications précédentes, **le coefficient multiplicateur global** est :
$(1+t)^{120} \simeq (1-0{,}00889)^{120} = 0{,}34$.
Cela revient en fait à une baisse de « seulement » 66% : $(0{,}34-1)\times 100 = -66$.
Rappels de formule, où CM est le coefficient multiplicateur et t le taux d'évolution :
- $CM = 1+t$ (ou $1+\dfrac{t}{100}$ si t est en pourcentage)
- $t = CM-1$ (ou $(CM-1)\times 100$ si on le veut en pourcentage)

t est négatif s'il s'agit d'une baisse, positif s'il s'agit d'une hausse.