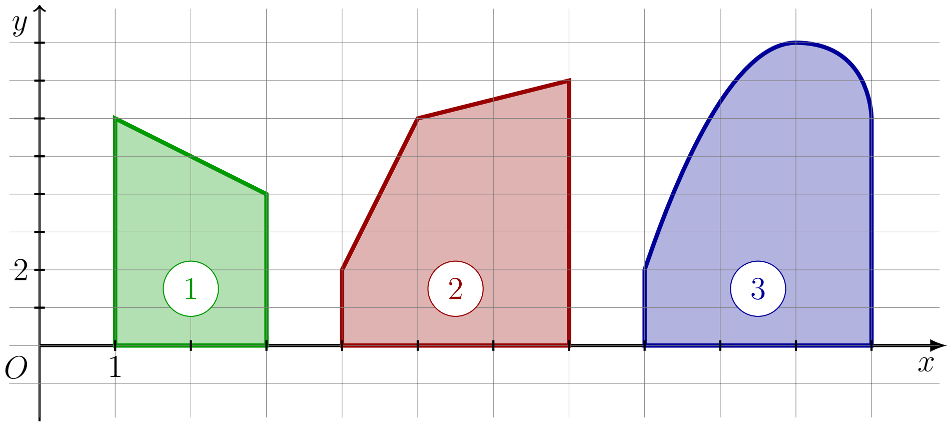
Calculs d'aires

∽

Exercice 1 (Aires par lecture graphique)
On considère les trois domaines tracés ci-dessous.
On suppose que l'unité correspond à 2 cm sur l'axe des abscisses et à 1 cm sur l'axe des ordonnées.



Rappel : l'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés 1 unité en abscisse et 1 unité en ordonnée. Ici, c'est l'aire d'un « carreau » de la figure. On appellera donc ici « carreau » une unité d'aire.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiqué si elle est vraie ou non et justifier la réponse.

1. L'aire du domaine ① vaut 10 cm^2.
2. L'aire du domaine ① vaut 10 carreaux.
3. L'aire du domaine ② vaut plus que 28 cm^2.
4. L'aire du domaine ③ est supérieure à celle du domaine ②.
5. L'aire du domaine ③ est comprise entre 36 cm^2 et 48 cm^2.

Exercice 2 (Calcul simple par graphique)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 3$.

1. Tracer la représentation de f dans un repère sur l'intervalle $[-1; 4]$ au moins.
2. Décrire le domaine dont l'intégrale $I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$ est l'aire.
   Autrement dit, indiquer par quoi le domaine est délimité.
3. Obtenir la valeur de I à l'aide de calculs d'aires simples.

Exercice 3 (Calculs d'intégrales)
Dans chaque cas, calculer l'intégrale de f demandée après avoir vérifié que la fonction F donnée est une primitive de f.

1. $\displaystyle\int_{-2}^{5} x^2 - 4x + 5dx$ et $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$
2. $\displaystyle\int_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ et $F(x) = 2\sqrt{x}$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} x\,\mathrm{e}^x\,dx$ et $F(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$
4. $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \ln(x)dx$ et $F(x) = x\ln(x) - x$

Exercice 4 (Calculs d'intégrales)
Calculer les intégrales suivantes.

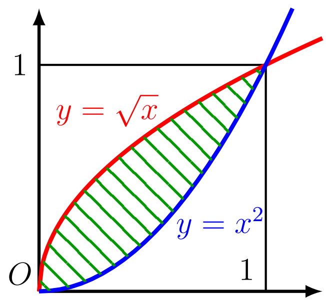
1. $\displaystyle\int_3^7 x^2+2x-9dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x+\frac{1}{x}dx$
3. $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3+xdx$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t^2}dt$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2}dx$
6. $\displaystyle\int_0^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+3}}dt$
7. $\displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{(x^2+3)^2}dx$
8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{2t-1}\,dt$
9. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln x}{x}dx$
10. $\displaystyle\int_{-2}^5 4t(2t^2+3)^2dt$

Exercice 5 (Calculs d'intégrales)
Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-2}^4 (3x-1)\,\mathrm{e}^{1{,}5x^2-x+3}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 (-3t^2+4t)(-t^3+2t^2+1)dt$
3. $\displaystyle\int_{-4}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+3}dx$
4. $\displaystyle\int_{-5}^{-4} \frac{2}{(2t+7)^2}dt$
5. $\displaystyle\int_1^3 \frac{7-6x}{\sqrt{9+7x-3x^2}}dx$
6. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} \frac{(\ln t)^2}{t}dt$

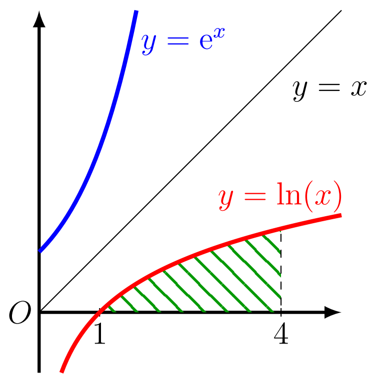
Exercice 6 (Calculs d'intégrales)

1. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
2. À l'aide de considérations géométriques, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 (1-\sqrt{x})dx$.
3. En déduire l'aide du domaine hachuré ci-contre.



Exercice 7 (Calculs d'intégrales – facultatif)

1. Écrire l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction ln, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=4$ sous forme d'intégrale.
2. Pourquoi le calcul de l'intégrale pose-t-il problème avec les seules connaissances du cours ?
3. À l'aide du graphique, trouver une méthode pour calculer l'aire du domaine.
   Indication : la résolution de l'équation $\mathrm{e}^x=4$ pourrait être nécessaire.



Exercice 8 (Linéarité)

On donne les valeurs des intégrales suivantes : $I=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x}dx=\frac{2}{3}$ et $J=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$.

Exprimer alors $K=\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}+6\sqrt{1-x}dx$ en fonction de I et J et en calculer la valeur.

Exercice 9 (Linéarité)

1. Calculer les intégrales $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x-1}dx$ et $J=\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x+1}dx$.
2. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$.
   (a) Démontrer que $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $K=\displaystyle\int_2^4 f(t)dt$.

Exercice 10 (Linéarité)

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.
2. Soit $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$.
   (a) Calculer $I + J$. Indication : utiliser la linéarité et simplifier.
   (b) En déduire la valeur de J.

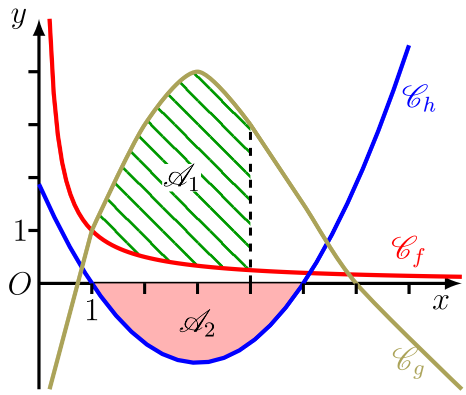
Exercice 11 (Valeur moyenne)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. Soit $I = \displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)dt$.

1. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de I.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. Calculer alors la valeur exacte de I.
4. En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3 : 3]$.

Exercice 12 (Encadrement)

Les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentent les fonctions f, g et h définies sur $]0; +\infty[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.
On a $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $h(x) = \dfrac{3}{8}(x-1)(x-5)$.
On ne donne pas l'expression de $g(x)$ en fonction de x.



1. Calculer l'aire du domaine défini par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.
2. Exprimer les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ à l'aide d'intégrales.
3. Démontrer que $\mathscr{A}_2 = 4$ cm^2.
4. Sachant que, pour tout $x \in [1; 3]$, $1 \leqslant g(x) \leqslant 4$, et que, sur $[3; 4]$, $3 \leqslant g(x) \leqslant 4$, démontrer que :
$$5 \leqslant \int_1^4 g(x)dx \leqslant 12$$
5. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}_1$.

Exercice 13 (Relation de Chasles – facultatif)

Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{8}$.
La droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = 6 - x$.
Les informations sont données sur le graphique.
L'unité est le centimètre.
Démontrer que l'aire du domaine hachuré est 6 cm^2.
Aide : Penser à utiliser la relation de Chasles.