Calculs d'aires
Correction partielle

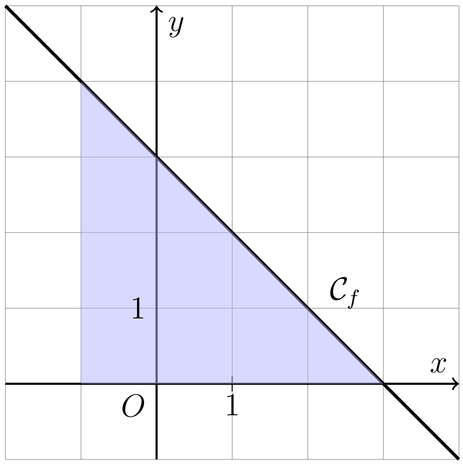
Exercice 1

On rappelle l'aire d'un trapèze ayant pour base b et les hauteurs h_1 et h_2 : $\dfrac{b(h_1+h_2)}{2}$
(on peut voir cela comme la moitié de l'aire d'un rectangle ayant une hauteur de (h_1+h_2) et une largeur de b)

1. **Faux :**
   On a l'aire d'un trapèze : $\dfrac{2(4+6)}{2} = 10$ u.a.
   Or ici l'unité d'aire est de $1 \times 2 = 2$ cm^2 d'après les unités.
   L'aire est donc de $10 \times 2 = 20$ cm^2.
   L'affirmation est donc fausse.
2. **Vrai :**
   Les carreaux étant des carreaux unitaires (d'aire 1 u.a.), nous avons vu à la question précédente qu'effectivement cette aire est de 10 carreaux.
3. **Vrai :**
   On peut calculer précisément l'aire du domaine 2 comme l'aire de deux trapèzes :
   $\dfrac{1(2+6)}{2} + \dfrac{2(6+7)}{2} = 4 + 13 = 17$ u.a.
   On multiplie par l'aire d'une unité d'aire pour l'avoir en cm^2.
   On obtient alors que l'aire du domaine 2 vaut 34 cm^2, qui est bien supérieure à 28 cm^2.
4. **Vrai :**
   Le domaine 2 est presque contenu tout entier dans le domaine 3. Ce qui « dépasse » (en haut à droite) est largement compensé (d'au moins un carreau supplémentaire) par les parties plus élevées.
5. **Vrai :**
   En considérant le rectangle de côtés 3 et 8 qui contient le domaine 3, on peut dire que ce rectangle a une aire supérieure à celle du domaine 3. Or cette aire vaut $3 \times 8 \times 2 = 48$ cm^2.
   Nous avons indiqué précédemment que l'aire du domaine 2, inférieure à celle du domaine 3, était de 34 cm^2. On peut estimer que l'on peut encore ajouter 1 carreau, donc 2 cm^2 tout en restant inférieur à l'aire du domaine 3.

Exercice 2

1. On a la figure suivante, le domaine étant celui colorié en bleu :



2. Le domaine a pour aire exactement l'intégrale demandée : $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

   Il s'agit de l'aire d'un triangle rectangle $\dfrac{b\times h}{2} = \dfrac{4\times 4}{2} = 8$ u.a.

Exercice 3

1. On a $F'(x) = \dfrac{1}{3}\times 3x^2 - 4\times 2x + 5\times 1 = x^2 - 8x + 5 = f(x)$.

   Ainsi, $\int_{-2}^{5} f(x)dx = F(5) - F(-2) = \dfrac{50}{3} - \left(-\dfrac{62}{3}\right) = \dfrac{112}{3}$.

2.
3. On a $F = uv$. Alors $F' = u'v + uv'$: $F'(x) = 1\,\mathrm{e}^x + (x-1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x = f(x)$.
   Ainsi, $\int_{0}^{\ln 2} f(x)dx = F(\ln(2)) - F(0) = 2(\ln(2)-1) - (-1) = 2\ln(2) - 1$

4. On a $F'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln x = f(x)$.

   Ainsi, $\int_{1}^{\mathrm{e}} f(x)dx = F(\mathrm{e}) - F(1) = \mathrm{e}\times 1 - \mathrm{e} - (1\times 0 - 1) = 0 - (-1) = 1$.

Exercice 4

Nous notons I ou J l'intégrale à calculer.

1. Soit $f(x) = x^2 + 2x - 9$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 9x$.

   Par suite, $I = F(7) - F(3) = \dfrac{301}{3} - (-9) = \dfrac{328}{3}$.

2. Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln x$.

   Par suite, $J = F(\mathrm{e}) - F(1) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{2}$.

3. Soit $f(x) = x^3 + x$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2$.
   Par suite, $I = F(2) - F(-2) = 6 - 6 = 0$.

4. Soit $f(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} - \dfrac{1}{t^2}$. Alors $F(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1}{t}$.

   Par suite, $J = F(4) - F(1) = \left(2 + \dfrac{1}{4}\right) - (1+1) = \dfrac{1}{4}$.

5. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Alors $F(x) = \ln(x+2)$.
   Par suite, $I = F(0) - F(-1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

6. Soit $f(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{t^2+3}}$. Alors $F(t) = 2\sqrt{t^2+3}$.
($\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$)
Par suite, $J = F(4) - F(0) = 2\sqrt{19} - 2\sqrt{3}$.
7. Soit $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$. Alors $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+3}$.
($\dfrac{u'}{u^2}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{u}$)
Par suite, $I = F(4) - F(0) = -\dfrac{1}{19} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{16}{57}$.
8.
9. Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
($\dfrac{u'}{u}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$)
Par suite, $I = F(3) - F(1) = \dfrac{1}{2}(\ln 3)^2$.
10. Soit $f(t) = 4t(2t^2+3)^2$. Alors $F(t) = \dfrac{1}{3}(2t^2+3)^3$.
($u'u^2$ a pour primitive $\dfrac{1}{3}u^3$)
Par suite, $J = F(5) - F(-2) = \dfrac{53^3}{3} - \dfrac{11^3}{3} = 49182$.

Exercice 5

1.
2.
3.
4.
5. $I = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{13}$ $(F(x) = 2\sqrt{9+7x-3x^2})$
6. $J = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-1) = \dfrac{2}{3}$ $(F(t) = \dfrac{1}{3}(\ln t)^3)$

Exercice 6

Exercice 7

1. L'intégrale est $I = \int_1^4 \ln(x)dx$.
2. En principe on ne connaît pas la primitive de $f : x \mapsto \ln x$ (elle n'est pas donnée en cours). Mais en fait nous avons déjà pu la voir dans des exercices de dérivation : $F(x) = x\ln x - x$.
Alors $I = F(4) - F(1) = 4\ln(4) - 4 - (-1) = 4\ln(4) - 3$.
3. Ici on utilise le fait que la courbe de la fonction exponentielle est le symétrique de celle de la fonction logarithme par rapport à la droite d'équation $y = x$.
La surface hachurée est la même que celle délimitée par la courbe de la fonction exponentielle, l'axe des ordonnées et les droites d'équation $y = 1$ et $y = 4$.
On cherche x tel que $e^x = 4$: $x = \ln 4$.
Alors on peut voir l'aire de la surface comme celle d'un rectangle de hauteur 4 et de largeur $\ln 4$ à laquelle on soustrait l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle entre 0 et $\ln 4$:
$4\ln 4 - \int_0^{\ln 4} \mathrm{e}^x\,dx$
Or si $g(x) = \mathrm{e}^x$, alors $G(x) = \mathrm{e}^x$, et $\int_0^{\ln 4} \mathrm{e}^x\,dx = G(\ln 4) - G(0) = \mathrm{e}^{\ln 4} - \mathrm{e}^0 = 4 - 1 = 3$.
Finalement, l'aire vaut bien $4\ln 4 - 3$.

Exercice 8

On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} + 6\sqrt{1-x}dx \\ &= \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 6\sqrt{1-x}dx \\ &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx + 6\int_0^1 \sqrt{1-x}dx \\ &= 4J + 6I \\ &= \pi + 4 \end{aligned}$$

Exercice 9

1. sur $[2;4]$,
   $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ a pour primitive $F : x \mapsto \ln(x-1)$
   et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ a pour primitive $G : x \mapsto \ln(x+1)$.
   Alors : $I = F(4) - F(2) = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ et $J = G(4) - G(2) = \ln 5 - \ln 3$.
2. (a) On a :
   $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x+1-x+1}{x^2-1} = \dfrac{2}{x^2-1} = f(x)$

   (b) Par suite, on peut obtenir K grâce à la linéarité de l'intégrale. En effet :

$$\begin{aligned} K &= \int_2^4 \frac{2}{x^2-1}dx \\ &= \int_2^4 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}dx \\ &= \int_2^4 \frac{1}{x-1}dx - \int_2^4 \frac{1}{x+1}dx \end{aligned}$$

   Autrement dit :

$$\begin{aligned} K &= I - J \\ &= \ln 3 - (\ln 5 - \ln 3) \\ &= 2\ln 3 - \ln 5 \\ &= \ln\left(\frac{3^2}{5}\right) \\ &= \ln\left(\frac{9}{5}\right) \end{aligned}$$

Exercice 10

1. On a $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{1+x^2}$.
   Donc $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + x^2$.
   f a pour primitive $F = \dfrac{1}{2}\ln u$.
   Donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
   Par suite, $I = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{2}\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(1) = \dfrac{1}{2}\ln 2 \quad \left(= \ln(\sqrt{2})\right)$.

2. (a) Pour calculer $I+J$, on utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)+g(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 xdx \end{aligned}$$

Soit $h(x) = x$. Alors $H(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Ainsi, $I+J = H(1) - H(0) = \frac{1}{2}$.

(b) On en déduit que $J = \frac{1}{2} - I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2) = \frac{1-\ln 2}{2}$.

Exercice 11

Exercice 12

1. On nous demande $I = \int_1^4 f(t)dt$ avec $f(t) = \frac{1}{t}$.
   Or $F(t) = \ln(t)$, donc $I = F(4) - F(1) = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$.
2. On a $\mathscr{A}_1 = \int_1^4 g(t)dt - \int_1^4 f(t)dt$.
3. On a $\mathscr{A}_2 = -\int_1^5 h(t)dt$ (la fonction étant négative, l'aire est l'opposé de l'intégrale).
   Or $h(t) = \frac{3}{8}(x-1)(x-5) = \frac{3}{8}(x^2-6x+5)$.
   Par suite, $H(t) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right)$. Alors :
   $\mathscr{A}_2 = -(H(5)-H(1)) = H(1) - H(5) = \frac{3}{8}\left(\left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right) - \left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right)\right) = 4$.
4. D'après la relation de Chasles, $\int_1^4 g(x)dx = \int_1^3 g(x)dx + \int_3^4 g(x)dx$.
   Or, pour $x \in [1;3]$, $1 \leqslant g(x) \leqslant 4$, donc d'après le cours (encadrement d'une intégrale), $1(3-1) \leqslant \int_1^3 g(x)dx \leqslant 4(3-1)$, soit $2 \leqslant \int_1^3 g(x)dx \leqslant 8$.
   De même, pour $x \in [3;4]$, $3 \leqslant g(x) \leqslant 4$, donc $3(4-3) \leqslant \int_3^4 g(x)dx \leqslant 4(4-3)$, soit $3 \leqslant \int_3^4 g(x)dx \leqslant 4$.
   En ajoutant les encadrements on obtient :
   $2+3 \leqslant \int_1^4 g(x)dx \leqslant 8+4$ soit $5 \leqslant \int_1^4 g(x)dx \leqslant 12$.
5. Pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}_1$, il suffit de soustraire I : $5 - \ln 4 \leqslant \mathscr{A}_1 \leqslant 12 - \ln 4$.

Exercice 13

Notons $\mathscr{A}$ l'aire de la surface hachurée.

Cette surface hachurée se découpe en deux parties :

- La première, d'aire $\mathscr{A}_1$, délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $x = 2$.

- La seconde, d'aire $\mathscr{A}_2$, délimitée par $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $x = 2$.

On a $\mathscr{A}_1 = \int_0^2 (f(t) - g(t))dt$ et $\mathscr{A}_2 = \int_2^4 ((6 - t) - g(t))dt$.
On aura finalement $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.
On a $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ et $G(x) = \dfrac{x^3}{24}$.
De plus, soit $h(x) = 6 - x$, alors $H(x) = 6x - \dfrac{1}{2}x^2$.
Par suite,
$\mathscr{A}_1 = (F(2) - G(2)) - (F(0) - G(0)) = F(2) - G(2) = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.
$\mathscr{A}_2 = (H(4) - G(4)) - (H(2) - G(2)) = \left(16 - \dfrac{8}{3}\right) - \left(10 - \dfrac{1}{3}\right) = 6 - \dfrac{7}{3}$.
Finalement, $\mathscr{A} = \dfrac{7}{3} + 6 - \dfrac{7}{3} = 6$ u.a.
Remarque : on aurait pu aussi écrire que $\mathscr{A} = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^4 h(t)dt - \int_0^4 g(t)dt$.