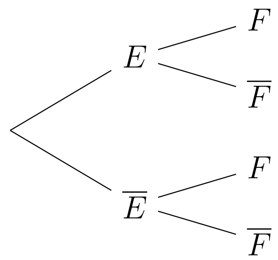
Inférence bayésienne

∽

Exercice 1 (Utilisation des arbres et des formules)
On considère deux événements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}2$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}4$.
Déterminer les valeurs de : $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.

Exercice 2 (Utilisation des arbres et des formules)
Soient E et F deux événements de probabilités non nulles.
On donne l'arbre ci-contre.
Pour chaque question, donner la bonne réponse parmi les trois proposées.



1. La probabilité conditionnelle de F sachant E se note :

   (a) $\mathbb{P}(E \cap F)$ (b) $\mathbb{P}_F(E)$ (c) $\mathbb{P}_E(F)$

2. Cette probabilité est égale à :

   (a) $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$ (b) $\dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)}$ (c) $\dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$

3. La probabilité $\mathbb{P}_E(\overline{F})$ est égale à :

   (a) $1 - \mathbb{P}_E(F)$ (b) $1 - \mathbb{P}_E(\overline{F})$ (c) $1 - \mathbb{P}(E \cap \overline{F})$

4. La probabilité de $\overline{E} \cap F$ est égale à :

   (a) $\mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}(F)$ (b) $\mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(F)$ (c) $\mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_F(\overline{E})$

5. La probabilité de F est égale à :

   (a) $\mathbb{P}_E(F) + \mathbb{P}_{\overline{E}}(F)$ (b) $\mathbb{P}_E(F)$ (c) $\mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(\overline{E} \cap F)$

6. La probabilité $\mathbb{P}_F(E)$ est égale à :

   (a) $\dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(\overline{E} \cap F)}$ (b) $\dfrac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)}$ (c) $\dfrac{\mathbb{P}_E(F)}{\mathbb{P}(E)}$

Exercice 3 (Utilisation des arbres et des formules)
Soient A et B deux événements tels que : $\mathbb{P}(A) = 0{,}7$; $\mathbb{P}_A(B) = 0{,}25$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$.
En exploitant un arbre pondéré bien choisi, calculer les probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(B)$ 2. $\mathbb{P}(\overline{B})$ 3. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ 4. $\mathbb{P}_B(A)$

Exercice 4 (Utilisation des arbres et des formules)
Soient A et B deux événements tels que : $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$; $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}16$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 0{,}3$.
En exploitant un arbre pondéré bien choisi, calculer les probabilités suivantes :

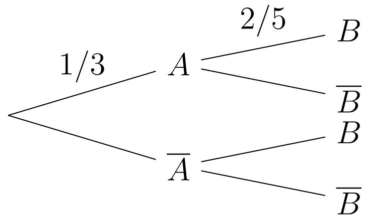
1. $\mathbb{P}(A)$ 2. $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ 3. $\mathbb{P}_A(\overline{B})$ 4. $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$

Exercice 5 (Utilisation des arbres et des formules)

Soient A et B deux événements.

On donne l'arbre ci-contre.

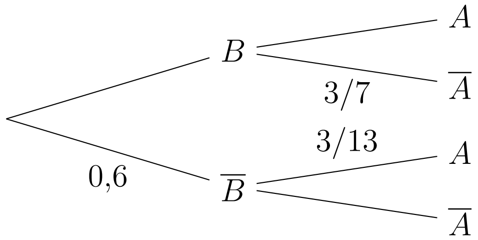
On sait de plus que $\mathbb{P}(B) = \dfrac{2}{3}$.



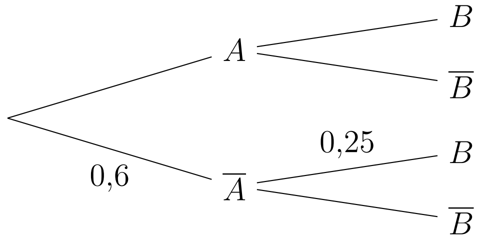
1. Compléter l'arbre en détaillant tous les calculs nécessaires.
2. Calculer $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(\overline{A})$.

Exercice 6 (Utilisation des arbres et des formules)

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous puis calculer $\mathbb{P}(A)$.



2. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous, sachant que $\mathbb{P}(B) = 0{,}35$.



Exercice 7 (Utilisation des arbres et des formules)

A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}4$, $\mathbb{P}_A(B) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$.

Calculer les probabilités $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.

Exercice 8 (Utilisation des arbres et des formules)

A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}6$, $\mathbb{P}_A(B) = 0{,}1$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}2$.

Calculer les probabilités $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(\overline{A})$.

Exercice 9 (Utilisation des arbres et des formules)

Les événements A, B et C forment une partition de l'univers Ω. De plus, $\mathbb{P}(A) = 0{,}2$ et $\mathbb{P}(B) = 0{,}7$.

Soit D un événement tel que $\mathbb{P}_A(D) = 0{,}2$, $\mathbb{P}_B(D) = 0{,}8$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = 0{,}05$.

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation
2. À l'aide de la formule de Bayes, calculer $\mathbb{P}_D(A)$.

Exercice 10 (Modélisation)

Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis de conduire du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève au hasard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisi ait eu son permis du premier coup ?
2. On interroge un élève ayant eu son permis du premier coup. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Exercice 11 (Modélisation)

Umar habite une ville où il pleut en moyenne un jour sur quatre. Lorsqu'il ne pleut pas, il sort son chien avec une probabilité de $\dfrac{4}{5}$. Lorsqu'il pleut, il sort son chien dans 10% des cas. Déterminer la probabilité qu'Umar sorte son chien un jour quelconque de la semaine.

Exercice 12 (Modélisation)

Deux grossistes proposent des bulbes de tulipe. Le premier produit des bulbes à fleurs rouges dont 90% donnent une fleur. Le second produit des bulbes à fleurs jaunes dont 80% donnent une fleur. Un bulbe donne au plus une fleur.

Un horticulteur achète 70% de ses bulbes au premier grossiste et le reste au second.

Un client a planté un bulbe de tulipe acheté chez cet horticulteur. Celle-ci a fleuri.

Quelle est la probabilité que cette fleur soit jaune ?

Exercice 13 (Modélisation)
Dans une entreprise spécialisée dans les technologies high-tech, le personnel est réparti en trois catégories :

- 28% sont ingénieurs de recherche (I) ;
- 45% sont ouvriers spécialisés (O) ;
- le restant sont techniciens supérieurs (T).

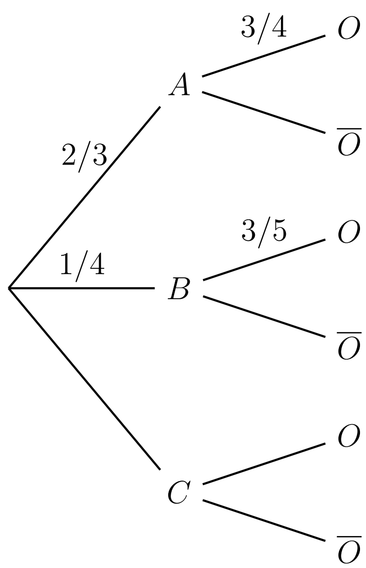
Parmi les techniciens, on dénombre 45% de femmes (F). Seulement 30% des ingénieurs sont des femmes. 70% des ouvriers sont des hommes (H).
On interroge au hasard un membre du personnel.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une ingénieure ? une ouvrière ?
   (b) Déterminer la probabilité que la personne interrogée soit une femme.
3. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit ingénieur sachant que cette personne est une femme.

Exercice 14 (Modélisation)
Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 7 noires et 3 blanches.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité :
   (a) de prélever deux boules blanches ;
   (b) de prélever deux boules de couleurs différentes ;
   (c) que la deuxième boule prélevée soit noire.
3. On vient de prélever deux boules de l'urne. La seconde est noire.
   Quelle est la probabilité que la première soit blanche ?

Exercice 15 (Modélisation)
Une association envisage de proposer des livraisons de paniers de produits fermiers contenant ou non des œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. L'adhérent peut choisir des paniers de petite taille (A), de taille moyenne (B) ou de grande taille (C). On considère l'événement O : « l'adhérent est intéressé par un panier contenant des œufs frais ». On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-contre.



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre intégralement.
   (a) Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(B \cap \overline{O})$ puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
   (c) La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'événement O est supérieure à 0,6.
   Est-ce que ce sera le cas ici ?
2. On sait de plus que $\mathbb{P}(O) = 0{,}675$.
   (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}(C \cap O)$.
   (b) Démontrer que $\mathbb{P}_C(O) = 0{,}3$. Compléter alors l'arbre précédent.
   (c) Un adhérent a choisi une livraison d'œufs. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ?

Exercice 16 (Modélisation)
Lors d'une soirée, une chaîne a retransmis un concours culinaire suivi d'une émission proposant des recettes rapides. On sait que :

- 56% des téléspectateurs ont regardé le concours culinaire ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le concours ont aussi regardé l'émission suivante ;
- 16,2% des téléspectateurs ont regardé l'émission proposant des recettes rapides.

Quelle est la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission de recettes sachant qu'il n'a pas regardé le concours culinaire ?

Exercice 17 (Modélisation)
Un laboratoire a mis au point un test de dépistage d'une maladie. Ce laboratoire indique les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par la maladie présente un test positif est égale à 0,99 ;
- la probabilité qu'un individu non atteint par la maladie présente un test négatif est également égale à 0,99.

On s'intéresse à une population « cible » dans laquelle on procède à un test de dépistage systématique. La proportion de personnes malades dans cette population cible est notée p.
Un individu est choisi au hasard dans cette population, on considère les événements :

M **:** « cet individu est malade » ;

T **:** « le test de cet individu est positif ».

1. (a) Interpréter les données de l'énoncé en terme de probabilité et traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}_T(M)$ a pour expression : $f(p) = \dfrac{99p}{1+98p}$.
   (c) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$. Interpréter.
2. Calculer la valeur des probabilités $\mathbb{P}_T(M)$ et $\mathbb{P}_T(\overline{M})$ lorsque $p = 0{,}7$ puis lorsque $p = 0{,}005$. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 18 (Modélisation – facultatif)
Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectés. Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ».
Un individu est choisi au hasard dans cette population. On considère les événements :

M **:** « l'individu choisi est atteint du chikungunya » ;

T **:** « le test de l'individu choisi est positif ».

On note p (avec $p \in [0;1]$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. (a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}(M \cap T)$, puis $\mathbb{P}(T)$ en fonction de p.
2. (a) Montrer que la probabilité de M sachant T est égale à $f(p) = \dfrac{98p}{97p+1}$.
   (b) Étudier et interpréter les variations de f sur $[0;1]$.
3. On décide de considérer que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95. À partir de quelle proportion p de malades dans la population cible le test est-il fiable ?

Exercice 19 (Indépendance)
On considère deux événements A et B d'un univers tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$.
Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$ dans chacun des cas suivants :

1. les événements A et B sont incompatibles ;
2. les événements A et B sont indépendants ;
3. $\mathbb{P}_A(B) = 0{,}1$.

Exercice 20 (Indépendance)
Dans une classe de 30 élèves, 10 font partie du club photo et 6 sont membres du club théâtre. Enfin, deux élèves sont membres des deux clubs.
On interroge un élève de la classe pris au hasard.
Montrer que les événements C « l'élève fait partie du club photo » et T « l'élève fait partie du club théâtre » sont indépendants.

Exercice 21 (Indépendance)
Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par **a** et **b**, indépendants l'un de l'autre. 2% des montres fabriquées présentent le défaut **a** et 10% le défaut **b**. Une montre est tirée au hasard dans la production.
On définit les événements suivants :

A **:** « la montre présente le défaut a » ;

B **:** « la montre présente le défaut b ».

1. Montrer que la probabilité que la montre ne présente aucun des deux défauts vaut 0,882.
2. Déterminer la probabilité que la montre présente au moins un défaut.
3. Déterminer la probabilité que la montre présente un et un seul des deux défauts.