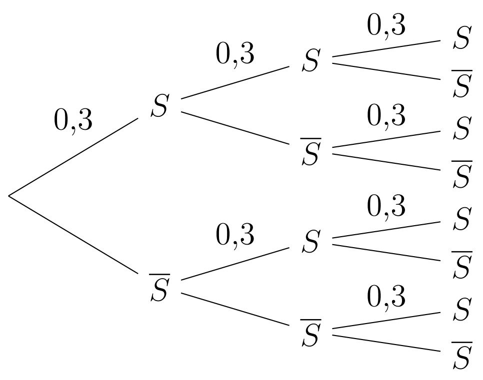
Expériences répétées

Exercice 1 (Schéma de Bernoulli)
On considère l'arbre ci-contre décrivant la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

1. Quelle est la probabilité d'un chemin comptant exactement 2 succès (S) ?
2. Combien de chemins comptent exactement 2 succès ?
3. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue du schéma.
   Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = 2)$ puis de $\mathbb{P}(X = 1)$.



Exercice 2 (Schéma de Bernoulli)
Dans chacune des situations suivantes, peut-on modéliser le problème à l'aide d'une loi binomiale ? Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

1. Lors d'une épreuve de biathlon, épreuve olympique mêlant ski de fond et tir à la carabine, chaque skieur doit parcourir un circuit à l'issue duquel il tire sur 5 cibles distantes de 50 mètres. Un biathlète rate sa cible dans 3% des cas. On s'intéresse au nombre X de cibles atteintes.
2. Selon l'INJEP, en 2015, 47% des jeunes Français de 16 ans ont une pratique sportive hebdomadaire. On interroge au hasard et de façon indépendante 20 jeunes Français de 16 ans dans la population. On s'intéresse au nombre X de jeunes de cet échantillon ayant une pratique sportive hebdomadaire.
3. Dans un stock de 20 vis dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis au hasard et sans remise. On s'intéresse au nombre X de vis qui ont la bonne longueur parmi les 15 vis choisies.
4. On lance un dé tétraédrique équilibré à six reprises. On s'intéresse au nombre X de fois où on a obtenu 4.

Exercice 3 (Coefficients binomiaux)
Sans utiliser la calculatrice, mais à l'aide des formules de cours, déterminer dans chaque cas la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. $\binom{20}{1} =$ (a) 0 (b) 1 (c) 20 (d) $\binom{20}{19}$
2. $\binom{5}{2} =$ (a) 3 (b) $\binom{5}{3}$ (c) 10 (d) $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$
3. $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} =$ (a) $\binom{10}{7}$ (b) $\binom{6}{4}$ (c) 15 (d) $\binom{6}{2}$

Exercice 4 (Coefficients binomiaux)
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants :

1. $\binom{15}{12}$ 2. $\binom{18}{16}$ 3. $\binom{20}{10}$ 4. $\binom{30}{16}$

Exercice 5 (Calculs de probabilités)
Dans cette exercice, la calculatrice n'est pas autorisée.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$.

1. Donner une expression numérique de chacune des probabilités suivantes
   (les éventuels coefficients binomiaux devront être calculés) :

   (a) $\mathbb{P}(X = 10)$ (b) $\mathbb{P}(X = 2)$ (c) $\mathbb{P}(X = 0)$ (d) $\mathbb{P}(X = 3)$

2. Que vaut l'espérance mathématique de X ?
3. Quelle est la valeur de l'écart-type de X ?

Exercice 6 (Calculs de probabilités)
Dans cette exercice, la calculatrice n'est pas autorisée.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}6$.
Donner une expression numérique de chacune des probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(X = 0)$ 2. $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$ 3. $\mathbb{P}(X < 5)$

Exercice 7 (Calculs de probabilités)
La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et 0,3.
À l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes (détailler si nécessaire) :

1. $\mathbb{P}(X = 4)$ 2. $\mathbb{P}(X \leqslant 7)$ 3. $\mathbb{P}(X > 9)$ 4. $\mathbb{P}(X \geqslant 5)$

Exercice 8 (Calculs de probabilités)
On considère un jeu de 32 cartes. On prélève successivement et avec remise trois cartes de ce jeu. On compte le nombre de figures obtenues à l'issue de ces trois tirages.

1. Modéliser la situation par un arbre de probabilités.
2. Montrer que cette expérience aléatoire constitue un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.
3. Déterminer la probabilité qu'exactement deux cartes sur les trois cartes prélevées soient des figures.

Exercice 9 (Calculs de probabilités)
Le conseil régional dote un lycée de 20 nouveaux ordinateurs. Une étude montre qu'un ordinateur de ce type tombera en panne durant la période de garantie avec une probabilité de 5%. On suppose que ces ordinateurs sont tous du même type et qu'ils peuvent tomber en panne indépendamment les uns des autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui tomberont en panne durant la période de garantie.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
2. Calculer la probabilité des événements suivants.
   (a) Au moins un ordinateur tombe en panne durant la période de garantie.
   (b) Exactement cinq ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie.
   (c) Au plus sept ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie.
3. Calculer et interpréter l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 10 (Calculs de probabilités)
Un restaurateur a constaté qu'au déjeuner six clients sur dix prennent un café. Huit clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui commandent un café sur l'ensemble des huit clients ayant déjeuné.

1. X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) Un seul client prend un café.
   (b) Exactement trois clients prennent un café.
   (c) Au moins un client prend un café.
   (d) Au plus quatre clients prennent un café.
3. Calculer et interpréter l'espérance de X.

Exercice 11 (Calculs de probabilités)
Une étude Ipsos menée en novembre 2019 indique qu'en réaction au phénomène de surconsommation 54% des Français privilégient désormais les marques éthiques et éco-responsables ou les articles recyclés lors de leurs achats en ligne. On interroge douze Français au hasard et de façon indépendante. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes parmi les douze personnes interrogées qui adoptent un tel comportement lors de leurs achats en ligne.

1. Quelle est la loi suivie par Y ?
   Justifier.
2. On a réalisé le calcul suivant sur une calculatrice :

$$\binom{12}{3} \times 0.54^3 \times 0.46^9$$

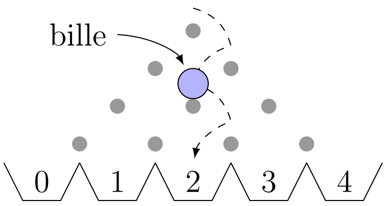
0.03194659

   Quelle probabilité ce calcul permet-il d'obtenir ?
3. (a) Calculer et interpréter la probabilité $\mathbb{P}(Y = 5)$.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins une personne interrogée adopte un comportement éco-responsable lors de ses achats en ligne.
   (c) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées adopte un comportement éco-responsable lors de ses achats en ligne.

Exercice 12 (Calculs de probabilités – facultatif)
Lors d'une assemblée de copropriétaires, il faut que le nombre de présents (ou mandatés) représente au moins la moitié de la propriété (on dit alors que le quorum est atteint). Une copropriété compte 22 copropriétaires représentant chacun, pour simplifier, $\dfrac{1}{22}$ de la propriété.
La probabilité qu'un copropriétaire assiste (ou soit représenté) à l'assemblée est de 80% et est indépendante de la venue des autres.
Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

Exercice 13 (Calculs de probabilités – facultatif)
On suppose qu'une urne contient 1 boule blanche et 99 boules noires.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.
Déterminer le plus petit entier naturel n pour que la probabilité de tirer au moins une fois la boule blanche soit supérieure ou égale à 0,95.
Indication : On pourra introduire la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue des n tirages. Exprimer alors $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$ en fonction de n puis remarquer que le problème se ramène à résoudre une inéquation d'inconnue n.

Exercice 14 (Calculs de probabilités – facultatif)
La planche de Galton, dispositif inventé par Francis Galton (1822-1911), est constituée d'une planche dans laquelle sont plantés quatre rangées de clous en quinconce. Lorsqu'on lâche une bille au sommet de la planche, cette dernière rencontre une succession de clous. À chaque clou rencontré, la bille passe à sa droite ou à sa gauche avec équiprobabilité. En fin de parcours, elle tombe dans une case (numérotée ici de 0 à 4).



1. **Exploitation de simulations avec tableur**
   On souhaite construire une feuille tableur du type :

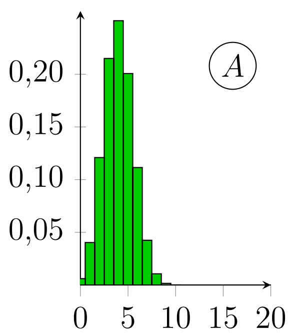
	A	B	C	D	E	F
1	Simulation	Clou n°1	Clou n°2	Clou n°3	Clou n°4	Case arrivée
2	1	D	G	D	G	2
3	2	G	G	D	D	2
4	3	D	D	G	D	3

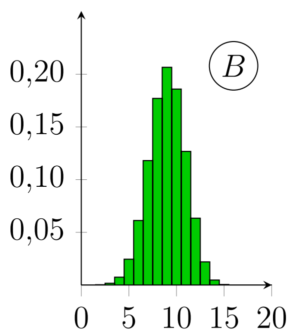
   (a) Dans la cellule B2 se trouve la formule : =SI(ALEA()<0,5 ;"D" ;"G")
   Expliquer cette formule.
   Cette formule a ensuite été recopiée (étirée) jusqu'à la colonne E puis vers le bas.
   (b) En utilisant la fonction NB.SI, donner une formule pour la cellule F2.
   (c) Recopier les formules des cellules de la ligne 2 vers le bas pour effectuer 1 000 puis 10 000 simulations de trajectoires.
   (d) En utilisant la fonction NB.SI, calculer les fréquences des billes présentes dans chaque case. On pourra rafraîchir les simulations en appuyant sur la touche F9 du clavier.

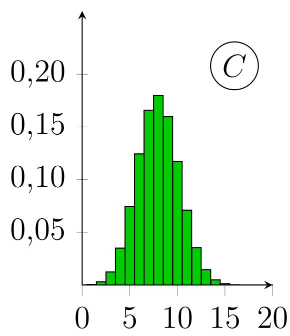
2. **Modélisation par un schéma de Bernoulli**
   (a) Justifier que la chute d'une bille peut être modélisée par un schéma de Bernoulli.
   (b) Quelle est la probabilité qu'une bille tombe dans la case n°0 ? Et dans la case n°4 ?
   (c) Dénombrer les chemins qui mènent à la case n°2. Quelle est la probabilité d'un tel chemin ? En déduire la probabilité qu'une bille tombe dans la case n°2.
   (d) De même, déterminer la probabilité que la bille tombe en case n°1, puis en case n°3.

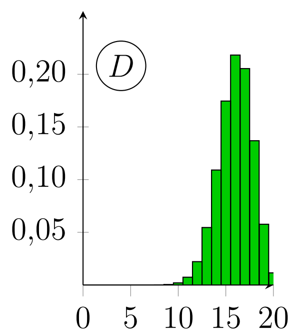
Exercice 15 (Représentation de la loi binomiale)
Associer chaque schéma avec la loi binomiale qui lui correspond en justifiant.

1. $\mathcal{B}(15; 0{,}6)$
2. $\mathcal{B}(20; 0{,}4)$
3. $\mathcal{B}(20; 0{,}8)$
4. $\mathcal{B}(10; 0{,}4)$









Exercice 16 (Intervalle de fluctuation – tests d'hypothèses)
Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n = 13$ et $p = 0{,}3$.
On a tabulé ci-dessous les probabilités $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour k allant de 0 à 13 (arrondies à 0,001 près) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 à 12	13
$\mathbb{P}(X \leqslant k)$	0,009	0,063	0,202	0,42	0,654	0,834	0,937	0,981	0,995	0,999	1

1. Quel est le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0{,}025$?
2. Quel est le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$?
3. Quel est le plus petit entier a' tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a') > 0{,}005$?
4. Quel est le plus petit entier b' tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b') \geqslant 0{,}995$?
5. Donner un intervalle de fluctuation à 95% de X.
6. Donner un intervalle de fluctuation à 99% de X.

Exercice 17 (Intervalle de fluctuation – tests d'hypothèses)
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n = 14$ et $p = 06$.

1. À l'aide de la calculatrice, obtenir les plus petits entiers :
   (a) a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0{,}025$
   (b) b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$
2. En déduire un intervalle de fluctuation à 95% de la variable aléatoire X.
3. En déduire un intervalle de fluctuation à 95% pour la variable aléatoire fréquence $F = \dfrac{X}{14}$.

Exercice 18 (Intervalle de fluctuation – tests d'hypothèses)
Un casino achète en grande quantité des dés qui doivent être parfaitement équilibrés. Le directeur du casino décide, pour tester l'un de ces dés, de le lancer 100 fois et de noter les résultats obtenus. Il observe alors 28 apparitions du numéro 6. L'objectif de cet exercice est de déterminer si le directeur doit considérer que le dé est équilibré ou non.

1. **Intervalle de fluctuation au seuil de 95%**
   (a) En considérant le dé testé équilibré et en notant X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus à l'issue de 100 lancers, déterminer la loi de X.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer les plus petits entiers :
      i. a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0{,}025$
      ii. b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$
   (c) En déduire un intervalle de fluctuation pour la fréquence associée à la variable aléatoire X.
2. **Prise de décision**
   (a) Le directeur doit-il accepter, au seuil de 95%, l'hypothèse selon laquelle la probabilité que son dé tombe sur 6 est égale à $\dfrac{1}{6}$?
   (b) Que doit-il en déduire sur son dé ?
   Peut-il être sûr de sa décision ?

Exercice 19 (Intervalle de fluctuation – tests d'hypothèses)
Une machine d'un laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, un médicament sous forme de gélules. Lorsque cette machine est bien réglée, au moins 97% des gélules sont conformes. Afin d'évaluer le bon réglage de cette machine, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1 000 gélules dans la production. Celle-ci étant supposée suffisamment importante, on assimile ce prélèvement à 1 000 tirages successifs avec remise.
Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 gélules non conformes dans l'échantillon prélevé.

1. Quelle est la fréquence de gélules conformes dans l'échantillon ?
2. (a) Grâce à la calculatrice, donner les plus petits entiers :
      i. a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0{,}025$
      ii. b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$
   (b) En déduire un intervalle de fluctuation à 95% de X, puis de la fréquence associée à X.
3. Le contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ?

Exercice 20 (Intervalle de fluctuation – tests d'hypothèses)
On lance 200 fois une pièce de monnaie. On obtient 123 fois Pile. Peut-on remettre en question, au seuil de 95%, le fait que cette pièce soit équilibrée ?

Exercice 21 (Intervalle de fluctuation – tests d'hypothèses)
Une usine fabrique des pièces dont le dernier contrôle qualité a montré que 92% d'entre elles sont conformes aux normes en vigueur. Au bout de quelques semaines, on veut vérifier si la proportion de pièces conformes est restée la même. Dans un prélèvement au hasard de 250 pièces, 225 sont conformes.
Doit-on accepter ou rejeter au seuil de 99% l'hypothèse : « 92% des pièces de la production sont conformes aux normes en vigueur » ?

Exercice 22 (Intervalle de fluctuation – tests d'hypothèses)
Le maire d'une commune prétend que 40% de ses administrés sont favorables à la construction d'une rocade desservant les communes avoisinantes. Une association de lutte contre les nuisances sonores doute de la réalité de cette affirmation et décide de réaliser un sondage auprès de 150 habitants. La population de la ville étant importante, on considère que le choix de ces 150 habitants est assimilable à un tirage avec remise de 150 individus.

1. En supposant que le maire dise vrai, déterminer la loi de la variable aléatoire X qui, à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard, associe le nombre de personnes favorables à la rocade.
2. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 99% de la variable aléatoire fréquence associée à X.
3. Sur les 150 personnes interrogées par l'association, 50 se déclarent favorables à la construction de cette rocade. Sur la base de cet échantillon, l'association peut-elle remettre en cause l'affirmation du maire ?

Exercice 23 (Intervalle de confiance)
En préparant une paëlla congelée conditionnée en sachet de 900 grammes, Louna constate qu'il ne contient que 4 crevettes. Une crevette décortiquée pèse 9 grammes, elle modélise donc la situation en considérant que le sachet est composé de 100 portions de 9 grammes.
À chaque portion, elle associe la variable aléatoire C qui vaut 1 si c'est une crevette et 0 sinon.
Ensuite, elle appelle X le nombre de crevettes dans l'échantillon que forme son sachet de 900 grammes.

1. Déterminer la loi de C et en donner ses paramètres. Faire de même pour X.
2. Soit p la proportion de crevettes dans les sachets de paëlla, assimilée à la probabilité d'avoir une crevette quand on prend une portion de 9 grammes.
   (a) Quelle est la fréquence observée dans l'échantillon ?
   (b) En déduire l'intervalle de confiance de p au seuil de 95%.
   (c) Interpréter ce résultat en donnant un encadrement du nombre de crevettes qu'elle peut espérer trouver dans un sachet de cette paëlla.
3. Elle lit la liste des ingrédients : « Contient 5% de crevettes décortiquées ».
   Que penser de cette affirmation ?