# Expériences répétées
# Correction partielle

∽

**Exercice 1**

1. La probabilité d'échec est $1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Un chemin comportant deux succès comporte un échec. Sa probabilité est alors $0{,}3^2 \times 0{,}7 = 0{,}063$.
2. Il y a trois chemins avec exactement deux succès (et un échec).
3. D'après les questions précédentes, on a alors $P(X = 2) = 3 \times 0{,}063 = 0{,}189$.
   De manière similaire, $P(X = 1) = 3 \times 0{,}3 \times 0{,}7^2 = 0{,}441$.

**Exercice 2**

1. On a effectivement une variable aléatoire de Bernoulli.
   On considère l'expérience qui consiste à tirer sur une cible. Si on considère le succès $S$ comme étant le fait de toucher la cible, alors $p = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$. On répète cette expérience 5 fois (il y a cinq cibles) de manière indépendante. En notant $X$ le nombre de succès, on a $X \sim \mathcal{B}(5; 0{,}97)$.
2. On considère l'expérience qui consiste à interroger un jeune Français. On considère le succès $S$ comme étant le fait qu'il ait une pratique sportive hebdomadaire. Alors $p = 0{,}47$. On répète cette expérience 20 fois de manière indépendante. La variable $X$ est le nombre de succès, on a donc $X \sim \mathcal{B}(20; 0{,}47)$.
3. Il ne s'agit pas ici d'un schéma de Bernoulli car le tirage est sans remise, donc l'expérience n'est pas répétée de manière identique.
   Cela dit, lorsque l'échantillon est très petit par rapport au stock (ce qui n'est pas le cas ici), on considère que c'est comme un tirage sans remise, ce qui permet d'utiliser la loi binomiale. C'est le cas par exemple pour des sondages (on interroge peu de personnes par rapport à la population) ou pour une prise d'échantillon dans une grosse production (pour tester la qualité de production).
4. On considère l'expérience qui consiste à lancer une fois le dé à quatre faces. On considère le succès $S$ comme étant le fait d'obtenir un 4. Alors $p = 0{,}25$ (le dé est équillibré). On répète cette expérience 6 fois de manière indépendante. La variable $X$ est le nombre de succès, on a donc $X \sim \mathcal{B}(6; 0{,}25)$.

**Exercice 3**

1. c. 20 (1 succès parmi 20 : 20 possibilités) et d. (cela fait 19 échecs)
2. b. (2 succès sur 5 c'est 3 échecs sur 5), c. (on peut faire un triangle de pascal) et d. (formule du cours)
3. b., c. et d (même principe).

**Exercice 4**

1. $\binom{15}{12} = 455$
2. $\binom{18}{16} = 153$
3. $\binom{20}{10} = 184756$
4. $\binom{30}{16} = 145422675$

**Exercice 5**

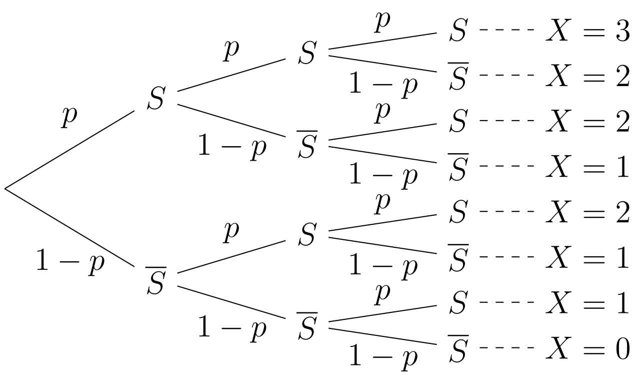
**Exercice 6**

**Exercice 7**
À l'aide de la calculatrice :

1. $P(X=4) \simeq 0{,}130$.
2. $P(X \leqslant 7) \simeq 0{,}772$.
3. $P(X > 9) = 1 - P(X \leqslant 9) \simeq 1 - 0{,}952 \simeq 0{,}048$.
4. $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \simeq 0{,}762$.

**Exercice 8**

1. L'arbre est le suivant en notant $S$ le succès : « obtenir une figure ».
   La probabilité vaut alors $\dfrac{12}{32} = \dfrac{3}{8}$ car il y a trois figures par couleur (valet, dame, roi).




2. Il s'agit bien d'un schéma de Bernoulli (on remarque que le tirage se fait bien avec remise).
   On a $n=3$ et $p=\dfrac{3}{8}$.
3. On veut : $P(X=2) = \binom{3}{2} \times p^2 \times (1-p)^1 = 3 \times \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{135}{512} \simeq 0{,}264$.

**Exercice 9**

**Exercice 10**

1. $X \sim \mathcal{B}(8; 0{,}6)$
2. Les résultats sont obtenus à l'aide de la calculatrice.
   (a) $P(X=1) \simeq 0{,}0079$.
   (b) $P(X=3) \simeq 0{,}1239$.
   (c) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) \simeq 0{,}9993$.
   (d) $P(X \leqslant 4) \simeq 0{,}4059$.
3. $E(X) = np = 8 \times 0{,}6 = 4{,}8$.
   Cela signifie qu'en moyenne, sur huit client, presque cinq clients prennent un café.

**Exercice 11**

1. On considère l'expérience qui consiste à interroger un français au hasard. Le succès est « la personne interrogée privilégie les marques éthiques et éco-responsables ». Alors $p = 0{,}54$.
   On répète cette expérience $n = 12$. Ce nombre étant très petit par rapport à la population totale, on considère que la répétition est identique et indépendante.
   On considère le nombre $Y$ de succès.
   Alors $Y \sim \mathcal{B}(12; 0{,}54)$.

2. Le calcul est celui de $P(Y=3)$.
3. (a) $P(Y=5) \simeq 0{,}158$.

   Cela signifie que la probabilité que 5 des personnes interrogées privilégient les marques éthique vaut 0,158.

   (b) On veut $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) \simeq 0{,}9999$.

   (c) On veut $P(Y \geqslant 6) = 1 - P(Y \leqslant 5) \simeq 0{,}7157$.

**Exercice 12**

On considère l'expérience qui consiste à choisir un copropriétaire. Le succès est : « la personne est venue ». Alors $p = 0{,}8$.
On répète cette expérience $n = 22$ fois de manière indépendante (cela est précisé dans l'énoncé).
Le nombre $X$ de copropriétaires qui vient suit alors la loi $\mathcal{B}(22; 0{,}8)$.
Les parts étant toutes égales, on veut $P(X \geqslant 11) = 1 - P(X \leqslant 10) \simeq 0{,}9997$.

**Exercice 13**

On considère l'expérience qui consiste à tirer une boule au hasard. Le succès est : « obtenir la boule blanche ». La probabilité est $p = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$. On répète cette expérience $n$ fois de manière indépendante (le tirage est avec remise).
Le nombre de succès, noté $X$, suit la loi $\mathcal{B}(n; 0{,}01)$.
On veut $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}95$.
Or $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}99^n$.
Ainsi, on cherche $n$ tel que $1 - 0{,}99^n \geqslant 0{,}95$.
On peut utiliser la calculatrice pour calculer les termes de la suite $u_n = 1 - 0{,}99^n$.
On voit que la valeur 0,95 est dépassée pour $n \geqslant 299$.
Il faut donc au moins 299 tirages pour avoir une probabilité supérieure à 0,95 d'avoir tiré au moins une fois la boule blanche.

**Exercice 14**

1. (a) La formule permet de choisir aléatoirement un côté ("D" ou "G"), avec une chance sur 2, puisque la fonction ALEA() permet d'obtenir un nombre aléatoire uniformément sur l'intervalle $]0; 1[$. Si le nombre aléatoire est inférieur à 0,5, alors la bille va à droite, sinon elle va à gauche.

   (b) En F2, on peut entrer la formule suivante : =NB.SI(B2 :E2 ;"D")

   Autrement dit on compte le nombre de "D", car cela donne le numéro de la case (dont le plus petit est 0).

   (c) Voir le fichier .ods complété

   (d) Idem

   Deux tableaux ont été créés, un vers la ligne 1000, l'autre vers la ligne 10 000, dans les colonnes H et I.

   On obtient par exemple pour 1000 simulations :

| Case | fréquence |
|---|---|
| 0 | 0,062 |
| 1 | 0,247 |
| 2 | 0,38 |
| 3 | 0,249 |
| 4 | 0,062 |
| Somme | 1 |

   Et pour 10 000 simulations :

| Case | fréquence |
|---|---|
| 0 | 0,0642 |
| 1 | 0,2364 |
| 2 | 0,3722 |
| 3 | 0,2627 |
| 4 | 0,0645 |
| Somme | 1 |

2. (a) On considère l'expérience qui consiste à faire tomber la bille sur un clou. Le succès est « la bille tombe à droite du clou ». La probabilité $p$ vaut 0,5. On répète cette expérience $n = 4$ fois. Le nombre $X$ de succès (qui correspond à la case dans laquelle tombe la boule) suite alors la loi $\mathcal{B}(4; 0{,}5)$.

   (b) $P(X = 0) = 0{,}5^4 = 0{,}0625 = P(X = 4)$ (car $(1-p)^4 = 0{,}5^4$).

   (c) le nombre de chemins qui mènent à la case 2 est $\binom{4}{2} = 6$.
   La probabilité d'un tel chemin est $0{,}5^4$ (tous les chemins ont la même probabilité car $p = 0{,}5 = 1 - p$).
   Ainsi, $P(X = 2) = 6 \times 0{,}5^4 = 0{,}375$.

   (d) On peut obtenir $P(X = 1) = P(X = 3) = 0{,}25$.

On voit que la simulation donne des valeurs proches (mais bien sûr pas égales).

**Exercice 15**
Il suffit de calculer les espérances, dont la valeur se situe environ au milieu de la figure.
D'autre part, si $p$ est grand, la « cloche » se décale vers la droite, alors que si $p$ est petit, elle se décale vers la gauche. Quand $p$ est proche de 0,5, elle est équilibrée autour de $E(X)$.

1. $E(X) = 15 \times 0{,}6 = 9$ donc B.
2. $E(X) = 8$ donc C (cloche assez centrée).
3. $E(X) = 16$ donc D (cloche décalée vers la droite).
4. $E(X) = 4$ donc A.

**Exercice 16**

**Exercice 17**

**Exercice 18**

1. (a) On a $X \sim \mathcal{B}\left(100; \dfrac{1}{6}\right)$.

   (b) On trouve $k_1 = 10$ et $k_2 = 24$.
   L'intervalle pour est alors $I = \left[\dfrac{10}{100}; \dfrac{24}{100}\right] = [0{,}1; 0{,}24]$.

2. (a) On a $f_{obs} = \dfrac{28}{100} = 0{,}28 \notin I$.
   L'hypothèse est alors rejetée.

   (b) Le dé semble ne pas être équilibré, mais la probabilité de se tromper en le considérant est de 0,05 : il ne peut pas être sûr de sa décision.

**Exercice 19**

1. $f_{obs} = \dfrac{1\ 000 - 53}{1\ 000} = \dfrac{947}{1\ 000} = 0{,}947$
2. (a) On obtient $a = 959$ et $b = 980$.

(b) L'intervalle est $I = \left[\dfrac{959}{1\ 000}; \dfrac{980}{1\ 000}\right]$.

3. $f_{obs} \in\in I$, donc on rejette l'hypothèse : les réglages faits par le laboratoire sont à revoir.

**Exercice 20**

On a $p = 0{,}5$ (l'hypothèse est que la pièce est équilibrée). On a $n = 200$. Le seuil de confiance est 95% donc on utilise l'intervalle défini par le cours. On trouve $a = 86$ et $b = 114$ avec la calculatrice.
Alors l'intervalle de fluctuation est $I = \left[\dfrac{86}{200}; \dfrac{114}{200}\right]$.
Par suite, $f_{obs} = \dfrac{123}{200} \notin I$, donc on rejette l'hypothèse.
Autrement dit, au seuil de 95% on peut remettre en question le fait que cette pièce soit équilibrée.

**Exercice 21**

Ici, $p = 0{,}92$. On nous donne $\alpha = 0{,}01$ (car le seuil de confiance est 99%).
De plus, $n = 250$.
Les valeurs $a$ et $b$ pour l'intervalle de fluctuation sont $a = 218$ et $b = 240$.
L'intervalle de fluctuation est alors $I = \left[\dfrac{218}{250}; \dfrac{240}{250}\right]$.
Or $f_{obs} = \dfrac{225}{250} \in I$.
Donc on accepte l'hypothèse « 92% des pièces de la production sont conformes aux normes en vigueur ».
Observons que l'on ne se contente pas de voir que $f_{obs} = 0{,}9 < p$. Il s'agit vraiment de savoir à quel point la valeur est significativement plus basse que $p$, d'où l'usage de l'intervalle.

**Exercice 22**

1. On a $X \sim \mathcal{B}(150; 0{,}4)$.
2. Ici on a $\alpha = 0{,}01$
   Le plus petit $a$ tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}005$ est $a = 45$.
   Le plus petit $b$ tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}995$ est $b = 76$.
   Alors $I = \left[\dfrac{45}{150}; \dfrac{76}{150}\right]$.
3. On a $f_{obs} = \dfrac{50}{150} \in I$, donc on valide l'hypothèse.
   Ainsi, l'association de peut pas remettre en cause l'affirmation du maire.