Chapitre :
Modèles discrets

∽

⊛ **Activité :** A et B page 37

I. Généralités sur les suites

Une suite u est une fonction dont la variable est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, au lieu de noter $u(n)$ l'image de n par u, on la note u_n. Les images u_n sont des nombres réels ($u_n \in \mathbb{R}$).
On dit que u_n est le terme général de la suite.
Les suites permettent de modéliser des phénomènes discrets, autrement dit ceux dont on peut numéroter les étapes.

1. Deux manières de générer une suite

Il existe essentiellement deux manières différentes de définir une suite :

Explicitement, c'est à dire en donnant une expression de u_n en fonction de n, exactement comme pour les fonctions habituelles.

Exemple soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 2$.
On peut calculer n'importe quel terme de la suite. Ainsi par exemple $u_7 = 3 \times 7 + 2 = 23$.

Par récurrence, c'est à dire en définissant u_{n+1} en fonction de u_n (autrement dit un terme en fonction du précédent). Il faut alors nécessairement donner la valeur du premier terme.

Exemple Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
La donnée d'un terme permet de calculer le suivant.
Ainsi, $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ puis $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$, etc.

▶ **Exercices :** Calcul de termes

2. Variations

Définition Soit u une suite. On dit que :
- u est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$;
- u est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Une suite qui change de variations est dit non monotone (on n'en détaille généralement pas les variations).

Méthode Pour déterminer la variation d'une suite u, on étudie alors le signe de $u_{n+1} - u_n$, **avec *n* quelconque**.
- Si quel que soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors u est décroissante.
- Si quel que soit $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors u est croissante.

Exemple Étudions la variation de la suite u définie par : $u_n = \dfrac{n^2+1}{2}$. On a :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2+1}{2} - \dfrac{n^2+1}{2} = \dfrac{(n+1)^2+1-(n^2+1)}{2} = \dfrac{n^2+2n+1+1-n^2-1}{2} = \dfrac{2n+1}{2}$.
Or n est un nombre entier naturel, donc tous les termes de l'expression $\dfrac{2n+1}{2}$ sont **positifs**.
On en déduit que $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite u est croissante.

⚠ On ne connaît généralement pas le signe de u_n, qui n'a *a priori* aucune raison d'être positif.

▶ **Exercices :** Variations
Pour les représentations graphiques, voir le manuel page 40 et le document sur la représentation des suites définies par récurrence ; le mode de représentation des suites dépend de la manière de les définir.

▶ **Exercices :** Représentation

3. Deux types de suites vus en première

a. Suites arithmétiques

Définition Une suite arithmétique u de raison r est une suite qui vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute la raison r.

Méthode Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on exprime $u_{n+1} - u_n$ et on montre que c'est une constante r, qui est alors la raison de la suite.

Exemple la suite définie par $u_n = 5n+3$ est une suite arithmétique de raison 5.
En effet, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1)+3-(5n+3) = 5n+5+3-5n-3 = 5$, donc $u_{n+1} = u_n + 5$.

Méthode Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, on calcule des différences de termes successifs, et on montre que deux d'entre elles ne sont pas égales.

Exemple Soit u une suite telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 5$.
Alors $u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2$ mais $u_2 - u_1 = 5 - 4 = 1 \neq 2$, donc u n'est pas arithmétique.

Propriété Une suite u est arithmétique de raison r si et seulement si $u_n = r \times n + u_0$

Remarque Autrement dit, une suite arithmétique est une fonction affine de la variable $n \in \mathbb{N}$, la raison de la suite étant le coefficient directeur.

Propriété Une égalité pratique pour certains calculs : Soit u une suite arithmétique de raison r. Pour $n \geq p$, on a
$$u_n = r(n-p) + u_p$$

Propriété Soit u une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$, alors u est croissante.
- Si $r < 0$, alors u est décroissante.

▶ **Exercices :** Suites arithmétiques

b. Suites géométriques

Définition Une suite géométrique u de raison q est une suite qui vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. Autrement dit, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par la raison q.

Méthode Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on exprime le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre que c'est une constante q, qui est alors la raison de la suite.

Exemple la suite définie par $u_n = 3 \times 5^n$ est une suite géométrique de raison 5.
En effet, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \dfrac{3 \times 5^n \times 5}{3 \times 5^n} = 5$, donc $u_{n+1} = u_n \times 5$.

Méthode Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique, on calcule des quotients de termes successifs de la suite, et on montre que deux d'entre eux ne sont pas égaux.

Exemple Soit u la suite définie par $u_n = 2n + 4$. Alors $u_0 = 4$, $u_1 = 6$ et $u_2 = 8$.
Par suite, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ mais $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \neq \dfrac{3}{2}$.
Donc la suite u n'est pas géométrique.

Propriété Une suite u est géométrique de raison q si et seulement si $u_n = u_0 \times q^n$

Propriété Une égalité pratique pour certains calculs : Soit u une suite géométrique de raison q. Pour $n \geq p$, on a

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Propriété Soit u une suite géométrique de raison $q > 0$ et de terme initial $u_0 > 0$.

- Si $q > 1$, alors u est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors u est décroissante.

▶ **Exercices :** Suites géométriques

▶ **Exercices :** Modélisation

II. Limites

L'étude des limites d'une suite est l'étude du comportement des termes de la suite lorsque n prend de grandes valeurs. Autrement dit, on se pose la question de savoir « où vont les termes de la suite à l'infini ».
On dit qu'une suite u **converge** vers un réel l lorsque les termes s'approchent essentiellement de plus en plus du nombre l à mesure que n augmente. Une définition plus rigoureuse est la suivante :

Définition Une suite u **converge** vers l si tout intervalle ouvert I contenant l (cet intervalle étant aussi petit que l'on souhaite) contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang N.
Mathématiquement : quel que soit l'intervalle ouvert I tel que $l \in I$, il existe un entier N tel que quel que soit $n \geqslant N$, $u_n \in I$.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

On dit d'une suite qui ne converge pas qu'elle **diverge**.
Deux manières particulières de diverger (mais pas les seules) est de diverger vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Définition Une suite u **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si quel que soit le réel A, il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs (resp. inférieurs) à A.
On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$)

Voir des illustrations et des limites à connaître dans le manuel page 42.

Les opérations sur les limites sont également à connaître. Elles sont assez intuitives, mais il faut faire attention aux **formes indéterminées**, c'est à dire celles où l'on ne peut pas conclure sans modifier l'expression.
De manière non rigoureuse (on ne calcule pas avec les infinis, on peut retenir que les formes indéterminées sont les quatre suivantes :

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Face à une forme indéterminée, il faut chercher à modifier l'expression pour « lever l'indétermination ». Les techniques pour cela s'apprennent, mais ne sont pas un attendu du programme de mathématiques complémentaires. On peut tout de même retenir une idée générale : factoriser par les termes les plus forts puis simplifier permet de lever beaucoup d'indéterminations. Dans les cas vraiment problématiques, les énoncés du manuel donneront l'aide suffisante.
Les limites d'une suite géométriques sont à connaître :

Propriété Soit q un réel strictement positif.
- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

▶ **Exercices :** Limites (formes déterminées et indéterminées)
Sont également à connaître deux méthodes supplémentaires permettant de déterminer la limite d'une suite par comparaison à d'autres suites.

Propriété Soit u et v deux suites et soit N un entier naturel.
On suppose que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Au contraire, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Théorème **(des gendarmes)** Soit u, v et w trois suites et N un entier naturel.
On suppose que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
On suppose qu'il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Voir le manuel page 44 pour une illustration de ces propriétés.

▶ **Exercices :** Limites – comparaison
Sont à connaître également les sommes de termes d'une suite géométrique et leurs limites (si le temps manque, ces propriétés ne seront pas travaillées en cours) :

Propriété Soit $q \neq 1$.
On considère une suite géométrique u définie pour tout entier n par $u_n = u_0 \times q^n$.
On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ (somme des $n+1$ premiers termes de la suite).
Alors $S_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. De plus :
- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$
- Si $q > 1$, alors la limite de S_n est infinie, du signe de u_0.
  Autrement dit, si $u_0 > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$
  et si $u_0 < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

▶ **Exercices :** Limites – somme de termes de suite géométrique

III. Suites arithmético-géométriques

⊛ **Activité :** fiche

Définition Une suite u est dite **arithmético-géométrique** s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque

- Si $a = 1$, alors u est arithmétique de raison b.
- Si $b = 0$, alors u est géométrique de raison a.
- Cependant, si $a \neq 1$ et $b \neq 0$, alors u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On s'intéresse donc pour la suite au cas où $a \neq 1$.
Le principe de l'étude de ces suites est très systématique.
On cherche à déterminer la forme explicite de la suite, puis sa limite.
Pour cela, on définit une suite v à partir de u, par une égalité de la forme $v_n = u_n - \alpha$, où le nombre α est la solution de l'équation $x = ax + b$ d'inconnue x.
On peut démontrer que la suite v est géométrique de raison a.
Le déroulement est toujours le même :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \quad \text{(utiliser la définition de } v \text{ en fonction de } u\text{)} \\
&= \frac{au_n + b - \alpha}{u_n - \alpha} \quad \text{(utiliser la définition de } u_{n+1} \text{ en fonction de } u_n\text{)} \\
&= \frac{a\left(u_n + \frac{b-\alpha}{a}\right)}{u_n - \alpha} \quad \text{(factoriser par } a\text{)} \\
& \text{Or, } -\alpha = \frac{b-\alpha}{a} \text{ (du fait que } \alpha \text{ est solution de } \alpha = a\alpha + b\text{), donc :} \\
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= a
\end{aligned}$$

Autrement dit v est géométrique de raison a.
Par suite, $v_n = v_0 \times a^n$, où $v_0 = u_0 - \alpha$.
Finalement, $u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha$.
La limite est soit $+\infty$, soit α, et cela selon la valeur de a.

Exemple Voir l'exercice corrigé page 47

▶ **Exercices :** Suites arithmético-géométriques

★ **Approfondissement :** choix d'un exercice dans les pages 60 à 63 (mathématiques en situation)