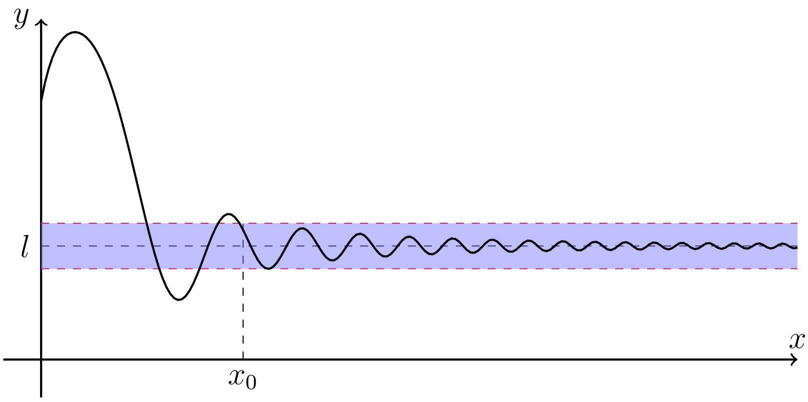
Chapitre :
Modèles continus

I. Limites d'une fonction

1. Limite à l'infini

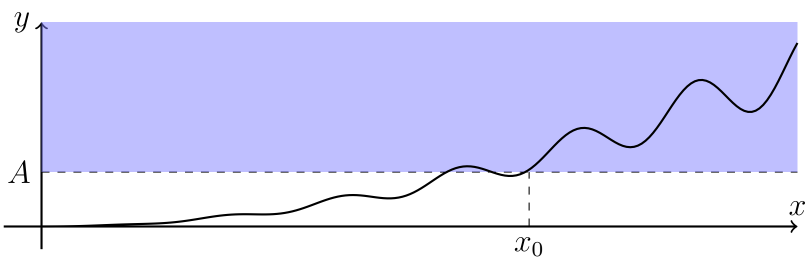
Soit f une fonction, soit l un réel.

Définition On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, quelque soit l'intervalle ouvert I contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \in I$.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, et on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.



Définition Quand une fonction admet une limite finie l en $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que la courbe de représentative f admet pour **asymptote horizontale** la droite d'équation $y = l$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Définition On dit que f a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ si quel que soit le réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$, $f(x) > A$ (resp. pour tout $x < x_0$, $f(x) < A$).
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).



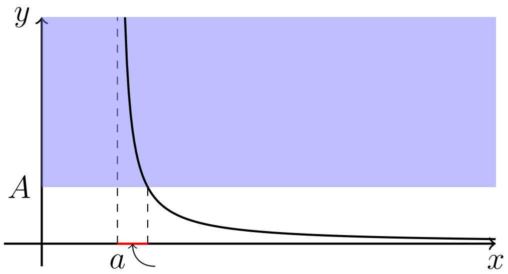
On peut donner des définitions similaires pour les limites lorsque x tend vers $-\infty$.

⚠ Les méthodes vues pour déterminer les limites avec les suites restent valable avec les fonctions.

2. Limite infinie en un réel a

Soit a un réel.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; a+r]$ ou $[a-r; a[$, où r est un réel positif.
(remarquer que f n'est *a priori* pas définie en a)

Définition On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si pour tout réel A, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



On peut donner une définition similaire pour une limite égale à $-\infty$.
Dans certains cas, on différencie avec une limite à gauche et une limite à droite.

Exemple On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

Définition Dans le cas où une fonction admet une limite infinie en un réel a, on dit que la courbe représentative de f admet pour **asymptote verticale** la droite d'équation $x = a$ (que la courbe ne touche jamais mais dont elle s'approche).

▶ **Exercices :** Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique

▶ **Exercices :** Limites et asymptotes – calculs

▶ **Exercices :** Limites par comparaison

▶ **Exercices :** Limites avec formes indéterminées

II. Équations différentielles ; primitives

Définition Une équation différentielle du premier ordre est une équation liant une **fonction inconnue** y, dérivable sur un intervalle I, et sa dérivée y'.

⚠ Une solution d'une équation différentielle est donc une fonction.
Nous n'en étudierons ici que deux particulières.

1. Équation $y' = f$ et primitives

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction F, dérivable sur I, telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Remarque Si F est une primitive de f, alors f est la dérivée de F.
En quelque sorte, chercher une primitive, c'est faire l'opération inverse de la dérivée.

Propriété Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
Il existe même une infinité de primitives.

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Soit G une primitive de f sur I.
Alors il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.
Autrement dit, si on connaît une primitive de f, on connaît toutes les autres ; on dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Déterminer une primitive peut être compliqué (voire impossible).
Cependant pour certains cas on peut disposer de formules.
Consulter le manuel à la page 72 pour un tableau de formules.
Il est conseillé de recopier ce tableau pour l'apprendre.
⚠ Il n'existe pas de formule de primitives pour des expressions comme uv ou $\dfrac{u}{v}$.
On ne connaît de primitives pour des produits ou des quotients que dans des cas particuliers.

▶ **Exercices :** Primitives

▶ **Exercices :** Primitive et fonction – variation et signe

2. Équation $y' = ay + b$

Commençons par la résolution de cette équation lorsque $b = 0$.

Propriété Soit a un nombre réel fixé. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$, où k est une constante réelle.

Démonstration : Voir le manuel page 74.

Remarque Chaque valeur de k donne une fonction qui est solution de l'équation différentielle.
Il y a donc une infinité de solutions à cette équation différentielle.

Toute solution de l'équation plus générale $y' = ay + b$ est la somme d'une solution de l'équation $y' = ay$ et d'une constante qui est solution particulière de l'équation $y' = ay + b$.
Plus précisément :

Propriété Soit a et b deux nombres réels fixés avec $a \neq 0$.

- L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution particulière constante $x \mapsto \alpha$, où α est un nombre réel.
  En fait, $\alpha = \dfrac{-b}{a}$
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} + \alpha$, où k est une constante réelle.

Exemple Soit l'équation différentielle $3y' + 2y + 5 = 0$
Cette équation équivaut à $y' = \dfrac{-2}{3}y - \dfrac{5}{3}$.

- On cherche déjà la solution particulière constante.
Soit $u(x) = \alpha$ cette solution particulière.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \dfrac{-2}{3}u(x) - \dfrac{5}{3}$.
Mais $u(x) = \alpha$ constante, donc $u'(x) = 0$.
Il vient alors que $0 = \dfrac{-2}{3}\alpha - \dfrac{5}{3}$.
Ainsi, $\alpha = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{-2}{3}} = -\dfrac{5}{2}$.
- Par suite, toute solution f de l'équation différentielle $y' = \dfrac{-2}{3}y - \dfrac{5}{3}$
a pour expression $f(x) = k\,\mathrm{e}^{\frac{-2}{3}x} - \dfrac{5}{2}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Si on fixe la valeur d'une image pour une valeur de x donnée, alors cela fixe la valeur de k.

Exemple Pour la même équation différentielle que précédemment, cherchons la fonction f telle que $f(3) = \dfrac{1}{2}$.
Alors $k\,\mathrm{e}^{-2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$, ainsi on trouve $k = \dfrac{3}{\mathrm{e}^{-2}} = 3\,\mathrm{e}^{2}$.
Ainsi, $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{\frac{-2}{3}x+2} - \dfrac{5}{2}$.

▶ **Exercices :** Équations différentielles $y' = ay'$

▶ **Exercices :** Équations différentielles $y' = ay + b$

★ **Approfondissement :** choix d'un exercice dans les pages 90 à 95 (mathématiques en situation)