Chapitre :
Calculs d'aires

∽

⊛ **Activité :** Consolider les bases page 128

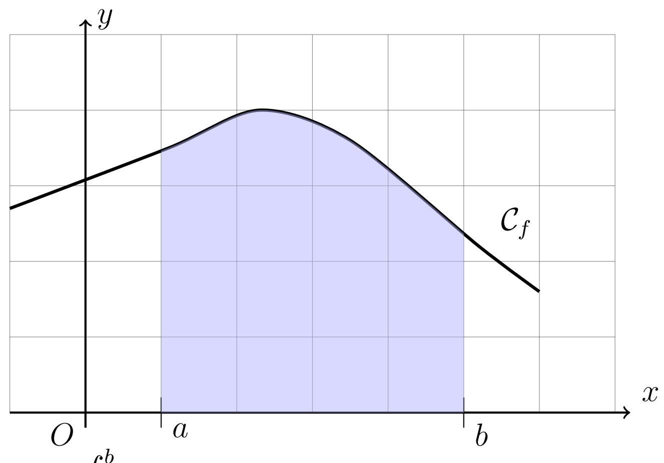
I. Intégrale d'une fonction continue positive

Dans cette partie, toutes les fonctions sont supposées continues et positives.
On se place dans un repère orthogonal $(0; I; J)$.
On appelle unité d'aire (u.a.) l'aire du rectangle dont trois des sommets sont O, I et J.

Définition Soit a et b deux réels, f une fonction (continue et positive) sur l'intervalle $[a; b]$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire (mesurée en unités d'aires) de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.



$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la surface colorée

Remarque Dans le cas particulier où $a = b$, on a $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$.
En effet, l'aire en question est celle d'un segment, donc elle vaut 0.

Remarque Le nom de la variable dans l'intégrale n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

Le symbole de l'intégrale fait penser à un 'S' ; on peut voir cela comme la somme d'aires de rectangles de hauteur $f(t)$ et de largeur presque nulle (dt) qui approximent l'aire sous la courbe (voir la méthode des rectangles page 134).

Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction quelconque peut s'avérer très complexe sans propriété supplémentaire.
On peut voir les situations 1, 2 et 3 des pages 128 et 129, qui donnent quelques méthodes anciennes.
Quand les surfaces se découpent en demi-cercles, triangles, trapèzes, on peut s'en sortir sans trop de problème : voir page 131.

▶ **Exercice :** Aires par lecture graphique

▶ **Exercice :** Calcul simple par graphique

II. Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Définition Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
On considère la fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété La fonction F est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f : $F' = f$.
Autrement dit, F est une primitive de f.
D'autre part,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Démonstration : Voir le manuel page 132.
En fait, plus généralement :

Propriété Soit F une primitive de f, donc telle que $F' = f$. Alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Il suffit donc de trouver une fonction F, primitive de f, pour calculer l'intégrale.
Plus généralement encore, on définit l'intégrale d'une fonction non nécessairement positive sur un intervalle $[a;b]$ par le biais d'une primitive et de la formule obtenue précédemment :

Définition Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit F une primitive de f.
On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ le nombre défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

▶ **Exercices :** Calculs d'intégrales
La propriété suivante permet de décomposer le calcul d'intégrales :

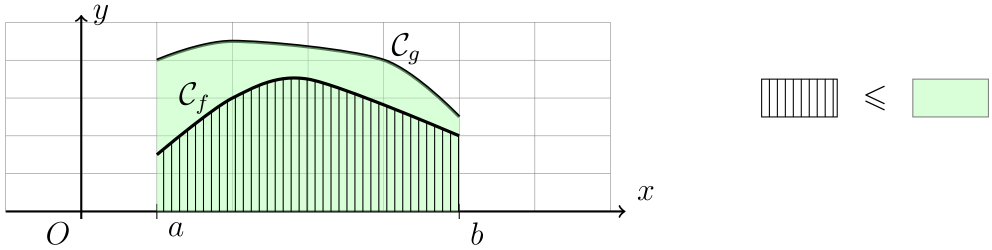
Propriété (Linéarité)
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et soit α un réel. Alors :
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Ces deux propriétés font que l'on dit que l'intégrale est linéaire (comme les fonctions du même nom).

▶ **Exercices :** Linéarité

III. Autres propriétés de l'intégrale

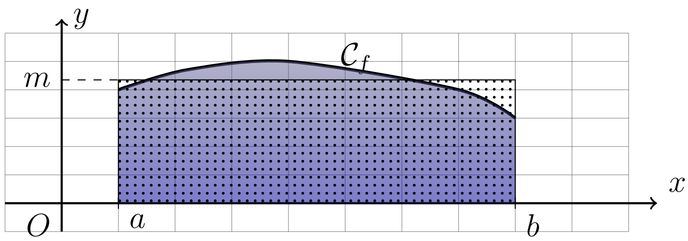
Propriété **(Comparaison)** Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.
Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
Illustration :



Définition **(Valeur moyenne)** Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
La valeur moyenne d'une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On explique cette définition par l'interprétation graphique suivante :
m est la hauteur d'un rectangle de largeur $b-a$ qui a la même aire que celle sous la courbe de f.



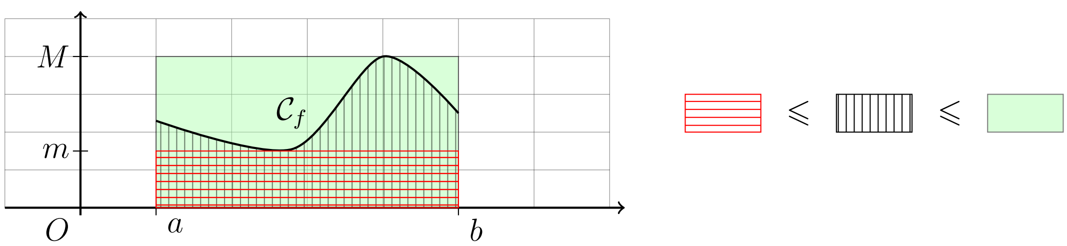
La zone bleue et le rectangle rempli de points ont la même aire. Autrement dit, $m\times(b-a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
On a donc bien $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

▶ **Exercices :** Valeur moyenne

Propriété **(encadrement d'une intégrale)**
Si il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

Illustration :



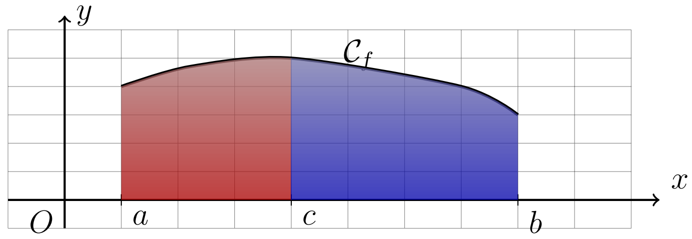
▶ **Exercice :** Encadrement

Propriété **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit $c \in [a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

On appelle cette relation la relation de Chasles (elle fait penser à la relation de Chasles vue en seconde pour les vecteurs).

Cette propriété est utile dans le cas où l'on souhaite calculer l'intégrale d'une fonction définie par morceaux.
Illustration graphique :



► **Exercice :** Relation de Chasles

★ **Approfondissement :** choix d'un exercice dans les pages 146 à 149 (mathématiques en situation)