Chapitre :
Inférence bayésienne

Pour ceux qui en ont besoin : rappel sur les probabilités conditionnelles (vidéo par Yvan Monka)
Possibilité également de vous entraîner sur la plateforme d'entraînement du manuel, dans le chapitre 7 de probabilités conditionnelles.

▶ **Exercices :** B-Dp175 et exercice « Consolider les bases » page 176

I. Probabilités conditionnelles

Définition On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des issues E muni d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Soit A et B deux événements de E, A étant de probabilité non nulle.
La probabilité de B sachant A (ou « sachant que A est réalisé »), notée $\mathbb{P}_A(B)$ est définie par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Remarque Avec les probabilités conditionnelles, il y a deux manières de calculer la probabilité $\mathbb{P}(A \cap B)$:

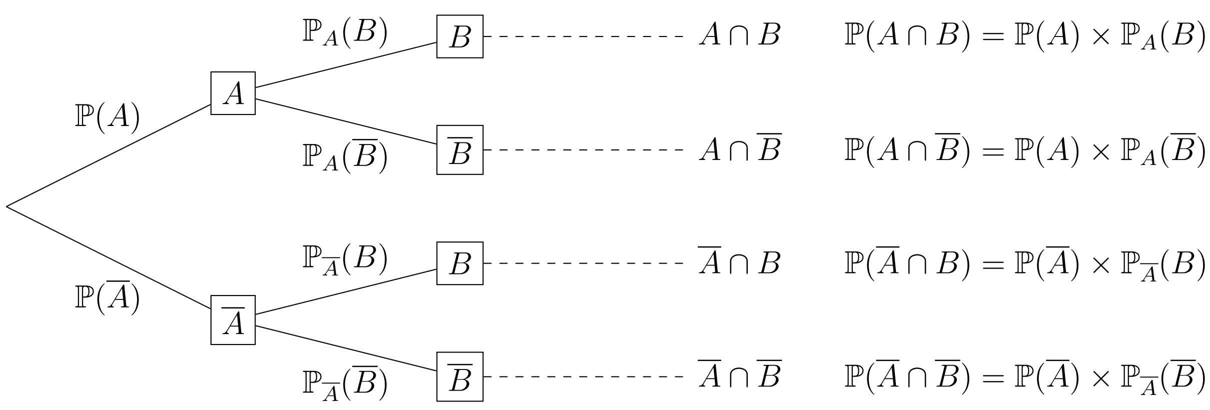
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) \text{ et } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B)$$

De plus,

$$\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$$

où $\overline{B}$ (« non B ») est l'événement contraire de B.

Voici comment un arbre de probabilités est pondéré avec les probabilités conditionnelles :



Méthode
- La somme des branches issues d'un même nœud vaut toujours 1 ;
- On effectue le produit le long des branches ;
- Si un événement correspond à plusieurs branches, alors on ajoute les probabilités des branches.

Propriété **(Formule des probabilités totales)** On suppose que l'univers probabiliste est la réunion des événements A_1, A_2, ..., A_n deux à deux incompatibles et de probabilité non nulle.
On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de l'univers.
Pour tout événement B on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où l'on a l'arbre plus haut, on a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

Méthode Dans la plupart des exercices utilisant les probabilités conditionnelles, il y a toujours une question où l'on cherche à « inverser » le sens de l'arbre. Autrement dit, on cherche par exemple à savoir ce que vaut $\mathbb{P}_B(A)$.
Pour cela, il faut alors utiliser la **formule** suivante dite **de Bayes** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

La probabilité $\mathbb{P}(B)$ ayant été calculée avec la formule des probabilités totales.
Plus précisément, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)}$$

Plus généralement, avec une partition de l'univers par les événements A_1, A_2, ..., A_n, on a :

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)}$$

▶ **Exercices :** Utilisation des arbres et des formules ; Modélisation

II. Indépendance

Définition Soit A et B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Propriété Soit A et B deux événements. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

Autrement dit, l'indépendance de A et B se traduit par le fait que la réalisation de l'événement B n'est pas conditionnée à celle de A (et vice versa), ou encore que la réalisation de l'événement A ne modifie pas la probabilité de réalisation de B (et vice versa).

Propriété Soit A et B deux événements. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants
- A et $\overline{B}$ sont indépendants
- $\overline{A}$ et B sont indépendants
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

▶ **Exercices :** Indépendance

★ **Approfondissement :** choix d'un exercice dans les pages 191 à 193 (mathématiques en situation)