

# Chapitre :

# Algorithmique



**Définition** Un **algorithme** est une suite finie et non ambiguë d'opérations ou d'instructions permettant de résoudre une classe de problèmes

Le mot algorithme vient du nom d'un mathématicien perse du IXe siècle, Al-Khwârizmî. Une autre étymologie dit qu'un algorithme est un calcul (« arithmos » en grec), qui est tellement long et difficile à faire à la main qu'il en devient douloureux : « algos » signifie douleur en grec : un algorithme est un calcul pénible à faire à la main. Le domaine qui étudie les algorithmes est appelé l'algorithmique.

## I. Validité d'un algorithme

---

Lorsqu'on écrit un algorithme, il est impératif de vérifier d'une part que cet algorithme **termine**, autrement dit qu'il va *produire un résultat en un temps fini*, **et** d'autre part que cet algorithme est **correct** dans le sens où le résultat sera *conforme à une spécification précise*. Quand ces deux faits sont démontrés, on dit alors que l'algorithme est **valide**.

### 1. Correction

On dit qu'un algorithme est **correct** si, quelque soit l'instance du problème (les valeurs des paramètres donnés en entrée), il produit la bonne sortie.

Lorsqu'un algorithme est construit avec une boucle, pour prouver qu'il est correct on utilise la notion d'**invariant de boucle**.

**Définition** Un invariant de boucle est une propriété vérifiée avant l'entrée dans une boucle, à chaque passage dans la boucle, et par conséquent à la sortie de la boucle.

**Méthode** Pour démontrer qu'une propriété est un invariant de boucle, on commence donc par vérifier que la propriété est vraie avant l'entrée de la boucle. On appelle cette étape l'**initialisation**. On démontre ensuite que si la propriété est vraie en entrée de boucle, alors elle est vraie après une itération. On appelle cette étape l'**hérédité**.

Ces deux étapes étant effectuées, on peut en déduire que la propriété est vraie à la sortie de la boucle, donc qu'elle est bien un invariant de boucle.

**Exemple** Voici un algorithme dont on souhaite démontrer qu'il permet de calculer le produit de deux entiers naturels  $a$  et  $b$  :

<p><b>Entrée :</b> a et b, deux entiers naturels</p> <p><b>Sortie :</b> p, un entier naturel</p> <p><b>Traitement :</b> m prend la valeur 0 p prend la valeur 0 Tant que <math>m &lt; a</math> Faire       m prend la valeur <math>m+1</math>       p prend la valeur <math>p+b</math> Fin Tant que</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

La propriété «  $p = m \times b$  » est un invariant de la boucle Tant que.

- **Initialisation :** Juste avant la boucle  $m=p=0$ , donc  $m \times b=0$ , et donc  $p=m$ .
- **Hérédité :** On suppose que  $p=m \times b$  avant une itération de la boucle.  
On note  $p'$  et  $m'$  les valeurs des variables p et m après l'itération de la boucle.  
On doit donc montrer que  $p'=m' \times b$ .  
Or  $m'=m+1$  et  $p'=p+b$ , donc  $m' \times b=(m+1)b=mb+b=p+b=p'$

On vient donc de démontrer que la propriété «  $p = m \times b$  » est un invariant de la boucle.

On en déduit qu'elle est vraie à la sortie de la boucle. Or, à la sortie, on a  $m = a$ .

Donc  $p = a \times b$ , ce qu'il fallait démontrer.

## 2. Terminaison

En plus de la correction, il faut démontrer la terminaison pour que l'algorithme soit valide. Autrement dit il faut démontrer que l'algorithme finit toujours par donner un résultat. Quand il y a des boucles, cela revient à dire que l'on sort forcément de la boucle au bout d'un nombre fini d'itérations.

**Méthode** Dans le cas d'une boucle non conditionnelle (boucle Pour), il est généralement certain que la boucle se termine (on sait à l'avance le nombre d'itération de la boucle si les valeurs prises par le compteur ne sont pas influencées par les instructions de la boucle).

Dans le cas d'une boucle conditionnelle (boucle Tant que), ce n'est pas une évidence, et dans ce cas on utilise la notion de **variant**.

**Définition** Un variant est une expression (la plus simple possible étant une variable) dont la valeur converge en un nombre fini d'étapes vers une valeur pour laquelle la condition d'arrêt de la boucle est satisfaite.

**Exemple** Voici un algorithme court avec une boucle Tant que :

<p><b>Entrée :</b> a, un nombre entier</p> <p><b>Sortie :</b> x, un nombre entier</p> <p><b>Traitement :</b> x prend la valeur 0 Tant que <math>x \times 2 &lt; a</math> Faire       x prend la valeur <math>x+1</math> Fin Tant que</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

On peut prendre comme variant la variable x. Elle augmente de 1 à chaque itération, donc il y aura nécessairement une étape où  $x \times 2$  sera supérieur à a (a étant constante).

### 3. Validité

Comme nous l'avons indiqué au tout début, un algorithme est dit valide s'il termine et s'il est correct.

**Exemple** Pour démontrer que l'algorithme qui fait le produit de  $a$  par  $b$  est valide, comme on a déjà montré qu'il est correct, il reste à démontrer que l'algorithme termine.

C'est le cas puisque la variable  $m$  est un variant.

Elle augmente toujours de 1, donc elle finira par atteindre  $a$  (il y a en fait exactement  $m$  passages dans la boucle).

 Ne pas confondre **variant de boucle** et **invariant de boucle**. Le premier permet de démontrer la terminaison, alors que l'autre permet de démontrer la correction.

En résumé, les propriétés d'un algorithme que l'on peut démontrer et les outils pour le faire sont :

propriétés :	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Correction</span>	+	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Terminaison</span>	=	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Validité</span>
outils :	<b>invariant</b>		<b>variant</b>		
	(propriété vraie avant et après chaque itération de la boucle)		(expression dont la valeur change de manière que la condition devienne fausse)		

## II. Coût d'un algorithme (en temps)

---

Le **coût**, ou la **complexité** d'un algorithme est le nombre d'opérations nécessaires à l'obtention du résultat, en fonction des données en entrée.

Le nombre d'opérations étant lié au temps passé à les réaliser, cela donne donc une idée du temps demandé par l'algorithme en fonction de la taille des données (par exemple la longueur d'une liste, ou même le nombre de chiffres dans un nombre en entrée).

Cette définition très large cache beaucoup de nuances que l'on ne détaillera pas ici. Le plus souvent, on peut s'interroger sur la complexité dans le pire cas (c'est à dire dans le cas où les données demandent le temps d'exécution le plus long).

**Exemple** Reprenons l'exemple de l'algorithme qui calcule le produit de deux entiers  $a$  et  $b$  vu précédemment.

Nous avons vu qu'il y a un nombre  $a$  de passages dans la boucle. Dans la boucle, il y a deux opérations d'affectation, où l'on fait à chaque fois une addition. Cela fait donc  $a \times 4$  opérations (si on compte les affectations comme des opérations).

Le coût est dit **linéaire**, car  $4a$  est une expression linéaire de  $a$ .

On ne compte pas toujours toutes les opérations effectuées. Dans les exercices, nous nous contenterons par exemple de compter des additions.

Plus généralement :

**Définition** Une complexité est **linéaire** si,  $n$  étant la taille des données, elle s'exprime sous la forme  $\alpha n + \beta$  avec  $\alpha \neq 0$ .

**Définition** Une complexité est **quadratique** si,  $n$  étant la taille des données, elle s'exprime sous la forme  $\alpha n^2 + \beta n + \gamma$ , avec  $\alpha \neq 0$ .

On trouve des complexités quadratiques dans le cas des boucles imbriquées. Par exemple de la forme :

```
Pour i allant de 1 à n Faire
| Pour j allant de 1 à n Faire
| | ...
| | Fin Pour
| Fin Pour
Fin Pour
```

ou même

```
Pour i allant de 1 à n Faire
| Pour j allant de 1 à i Faire
| | ...
| | Fin Pour
| Fin Pour
Fin Pour
```

Mais cela peut rester linéaire comme dans le cas ci-dessous, si  $k$  est une constante, ne dépendant pas de  $i$  :

```
Pour i allant de 1 à n Faire
| Pour j allant de 1 à k Faire
| | ...
| | Fin Pour
| Fin Pour
Fin Pour
```

**Remarque** On peut s'intéresser à d'autres types de complexités (ou coûts), comme par exemple en mémoire plutôt qu'en temps.

## III. Algorithmes sur les tableaux

---

Nous étudions ici quelques algorithmes portant sur des tableaux. Nous écrirons ces algorithmes dans le langage Python, et les tableaux seront des éléments de type `list`.

### 1. Calcul de moyenne

Pour le calcul d'une moyenne, on utilise un accumulateur, c'est à dire une variable qui va être augmentée successivement des valeurs de la liste en entrée.

```
def moyenne(liste):
    n = len(liste)
    s = 0
    for u in liste:
        s = s+u
    return s/n
```

La variable `u` prend successivement les valeurs de la liste `liste`. On dit que l'on fait un parcourt séquentiel de la liste.

Le coût de cet algorithme est linéaire en la taille `n` de la liste. En effet, il y a `n` itérations de la boucle, dans laquelle on fait deux opération (somme et affectation).

L'instruction `len(liste)`, qui permet d'obtenir la longueur de la liste, s'effectue à coût constant.

### 2. Recherche d'occurrence

Soit `t` un tableau et `x` un élément. On cherche l'indice `i`, s'il existe, tel que `t[i] = x`.

```
def recherche(x,t):
    n = len(t)
    i = 0
    while i<n and x != t[i]:
        i = i+1
    if i < n:
        return i
```

Déterminons le coût. Le pire des cas est celui où l'élément n'est pas dans `t`, ou si c'est le dernier élément. Dans ce cas on parcourt tout le tableau, et on produit donc `n` comparaisons. Le coût est donc linéaire.

On peut également utiliser l'algorithme suivant, qui utilise une boucle Pour de laquelle on sort prématurément avec un `return` si l'élément est trouvé :

```
def recherche(x,t):
    for i in range(len(t)):
        if t[i] == x:
            return i
```

**Remarque** Lorsque l'on souhaite accéder à la fois à l'élément `e` d'une liste et à son indice `i`, on peut utiliser la fonction `enumerate` :

```
def recherche(x,t):
    for i,e in enumerate(t):
        if e == x:
            return i
```

### 3. Recherche d'un extremum

On recherche, dans une liste, un maximum et/ou un minimum. Pour cela on va utiliser une variable qui va prendre pour valeur un maximum (ou minimum) provisoire, en commençant par le premier élément de la liste (supposée non vide).

```
def maximum(liste):
    maxi = liste[0]
    for x in liste:
        if x > maxi:
            maxi = x
    return maxi
```

Là aussi, le coût est linéaire en la taille `n` de la liste.

Comme exercice, on peut modifier l'algorithme pour qu'il détermine le minimum, voire qu'il détermine à la fois le minimum et le maximum (en renvoyant alors un couple de valeurs).

### 4. Recherche dichotomique

Le principe de la dichotomie est de diviser par deux, à chaque itération, la taille de la liste dans laquelle on recherche un élément. Ce principe permet alors d'obtenir des algorithmes meilleurs que des algorithmes ayant un coût linéaire. On dit que la dichotomie utilise le principe *diviser pour régner*.

Ici on suppose que la liste est triée. Il y a plusieurs moyens de trier une liste, en particulier avec Python, qui donne la fonction `sorted`.

```

def recherche_par_dichotomie(x,liste):
    gauche = 0
    droite = len(liste)
    while droite - gauche > 1:
        centre = (gauche + droite) // 2
        if x < liste[centre]:
            droite = centre
        else:
            gauche = centre
    if x == liste[gauche]:
        return gauche

```

Démontrons la terminaison de l'algorithme : Le variant de la boucle est `droite - gauche`. À chaque itération, soit `droite`, soit `gauche`, prend la valeur du centre de l'intervalle `[droite; gauche]`. Ainsi, l'écart diminue de moitié à chaque itération. Si la longueur de la liste  $n$  est inférieure à  $2^k$ , alors au bout de  $k$  étapes (au plus), on a divisé la longueur de l'intervalle par  $2^k$ , donc sa longueur est devenue inférieure ou égale à 1. Autrement dit `droite - gauche`  $\leq$  1, ce qui est la condition de sortie de la boucle Tant que.

**Remarque** Pour une liste de longueur 100, comme  $100 < 2^7$ , il suffit de 7 étapes. Pour une liste de longueur 1000, comme  $1000 < 2^{10}$ , il suffit de 10 étapes.

Le coût est donc meilleur que linéaire

D'autre part, puisque, lorsque l'on cherche l'écriture en binaire d'un entier  $n$ , on fait successivement des divisions par 2 en même quantité que le plus petit  $k$  tel que  $n < 2^k$ , on en déduit que le coût correspond au nombre de bits de l'écriture en binaire de  $n$ .

Le nombre de fois que l'on peut diviser  $n$  par 2 est noté  $\log_2(n)$ .

Le coût de l'algorithme de dichotomie est donc en  $\log_2(n)$  que l'on écrit souvent seulement  $\log(n)$  par abus de notation.

Le  $\log$  est un logarithme (fonction mathématique vue en terminale).

Démontrons maintenant la correction de l'algorithme.

Les variables `gauche` et `droite` sont initialisées respectivement à 0 et `len(liste)`. Si  $x$  est strictement inférieur à `liste[0]` ou strictement supérieure à `liste[droite-1]`, alors il n'appartient pas à `liste`, et l'algorithme renvoie `None`, ce qui est correct.

On suppose maintenant que  $x$  est situé entre `liste[0]` et `liste[droite-1]`. Ajoutons un élément à `liste`, strictement supérieur à son plus grand élément; par exemple `liste[droite-1]+1`.

Ainsi, on a la propriété suivante en entrant dans la boucle : « `liste[gauche] ≤ x < liste[droite]` ».

On va démontrer que cette propriété est héréditaire, afin de démontrer que c'est un invariant de la boucle Tant que. On suppose donc qu'elle est vraie à une étape donnée, et on doit démontrer qu'elle reste vraie après une itération de la boucle.

La variable `centre` est située entre `gauche` et `droite` d'après sa définition, et comme la liste est ordonnée, on peut donc affirmer que `liste[gauche] ≤ liste[centre] < liste[droite]`.

- Si `x < liste[centre]`, alors nécessairement `liste[gauche] ≤ x < liste[centre]`. Mais dans ce cas, `droite` prend la valeur `centre`, donc `liste[gauche] ≤ x < liste[droite]`.
- Sinon `liste[centre] ≤ x < liste[droite]`. Mais dans ce cas, `gauche` prend la valeur `centre`, donc `liste[gauche] ≤ x < liste[droite]`.

La propriété est donc bien héréditaire.

On déduit des résultats précédents que la propriété est un invariant de boucle, et qu'elle est donc vraie à la sortie de la boucle.

Or, à la fin de la boucle, on a nécessairement `droite - gauche ≤ 1`.

Plus précisément, `droite - gauche = 1` car la différence est strictement positive (elle ne peut pas être nulle, car au dernier passage dans la boucle, `droite - gauche ≥ 2`, et `centre` est alors strictement

compris entre droite et gauche ; comme elle remplace l'une des deux, la différence reste strictement positive)

Ainsi, la propriété devient, en sortie de boucle : `liste[gauche] ≤ x < liste[gauche+1]`.

Par suite, soit `x` vaut `liste[gauche]`, soit `x` n'appartient pas à la liste.

L'algorithme est bien correct.

**Remarque** En mathématiques, on peut voir la recherche d'une solution de l'équation  $f(x) = 0$  sur un intervalle  $[a; b]$  à l'aide d'un algorithme de dichotomie.

## IV. Notation, comparaison de complexités

---

Soit  $n$  une mesure de la taille des données manipulées par un algorithme.

Si un algorithme est linéaire, on notera que sa complexité est en  $O(n)$ .

S'il est quadratique, on notera que sa complexité est en  $O(n^2)$ .

Un algorithme de dichotomie a une complexité en  $O(\log_2(n))$ , souvent noté abusivement (mais tout de même à raison)  $O(\log(n))$ .

Pour un algorithme à coût constant, on peut noter sa complexité sous la forme  $O(1)$ .

On a alors la comparaison suivante de certaines complexités :

$$O(1) < O(\log_2(n)) < O(n) < O(n \log_2(n)) < O(n^2) < O(2^n)$$

# V. Tri de listes

---

Le tri est une opération courante, et donc importante, en informatique. Trier une liste c'est ordonner ses éléments selon un ordre donné (numérique, alphabétique, lexicographique, etc.). Il existe de très nombreux algorithmes de tri, plus ou moins efficace, et surtout plus ou moins efficaces selon les propriétés initiales de la liste à trier.

Un bon exercice peut être de prendre un jeu de carte (ou seulement une des quatre couleurs de ce jeu), de le mélanger, puis d'observer notre manière de le trier. Mieux que de l'observer, de décrire pour quelqu'un d'autre une méthode permettant de trier le jeu. Il est possible d'observer déjà, pour un tri « naturel », plusieurs stratégies possibles, parfois même des mélanges de stratégies.

En première NSI, deux algorithmes sont à étudier, à savoir le tri par sélection et le tri par insertion. Ils ne sont pas forcément les plus efficaces ou les plus rapides, mais ils sont assez simples à comprendre. De meilleurs tris pourront être vus en terminale.

Précisons avant de les décrire ce que nous entendons ici par liste : une liste est un ensemble d'éléments accessibles via un indice (allant de 0 à  $n - 1$  s'il y a  $n$  éléments) dont on peut changer les éléments (et en particulier échanger deux éléments de celle-ci). Les éléments de cette liste sont tous de même type, et on dispose d'une relation d'ordre qui permet de comparer deux éléments entre deux sous la forme «  $a < b$  ».

## 1. Tri par sélection

Le principe de ce tri est d'aller « sélectionner » à chaque étape l'élément le plus petit du reste de la liste à trier et d'aller le mettre à la suite des éléments déjà triés.

Voici l'algorithme de tri par sélection, prenant pour argument une liste nommée simplement liste :

```
Pour i allant de 0 à n-2 Faire
  i_mini ← i
  mini ← liste[i]
  Pour j allant de i+1 à n-1 Faire
    Si liste[j] < mini Alors
      i_mini ← j
      mini ← liste[j]
    FinSi
  Fin Pour
  échanger liste[i] et liste[i_mini]
Fin Pour
```

La boucle Pour la plus intérieure est celle qui recherche le minimum, ainsi que son indice, dans la partie non encore triée de la liste, de manière assez évidente (nous ne le démontrerons pas ici).

À mesure que l'on avance, les éléments de la liste de l'indice 0 à  $i$  sont triés, c'est ce que nous démontrerons.

Voir sur [Wikipedia](#) la page du tri par sélection qui en donne quelques animations.

### Exercice 1

Coder cet algorithme dans le langage Python puis le tester (sur de petites listes).

Il est à noter que cet algorithme modifie la liste. Si on souhaite conserver la liste et obtenir en sortie une autre liste, il faut créer une copie de la liste, appliquer l'algorithme à cette copie et retourner la copie une fois triée.



Étudions maintenant les aspects théoriques de cet algorithme, à savoir la validité de l'algorithme puis son coût.

Pour la validité, on doit démontrer que l'algorithme termine et qu'il est correct.

- Tout d'abord, cet algorithme termine, puisque l'on a affaire à deux boucles Pour dont le nombre de passages est parfaitement déterminé et fini.
- Étudions alors la correction de l'algorithme. Pour cela, il nous faut un invariant de boucle (celui de la boucle principale).

L'invariant est : « quelque soit  $i$ , la liste est une permutation de la liste initiale (c'est à dire qu'elle contient les mêmes éléments, dans un ordre éventuellement différent), la liste `liste[0:i]` (indice  $i$  compris) est triée et tous les éléments de la liste `liste[i+1:n-1]` sont supérieurs à tous les éléments de la liste `liste[0:i]` ».

Le fait que ce soit une permutation est évident, puisque le seul endroit où des éléments sont modifiés dans la liste, ils le sont en échangeant deux éléments de la liste.

- \* Pour l'initialisation, on peut estimer qu'avant la boucle, la propriété n'a pas de sens puisque  $i$  n'existe pas. On démontre donc qu'après la première itération, la propriété est vraie. Après cette première itération, on a  $i=0$ , et la liste `liste[0:i]` ne contient alors qu'un seul élément et est forcément triée. D'autre part, la valeur qu'elle contient est le minimum qui a été déterminé par la boucle Pour imbriquée, donc cette valeur est bien inférieure à tous les autres éléments de la liste.
- \* Pour l'hérédité, on suppose que la propriété est vrai pour un  $i$  donné, on doit démontrer qu'elle le reste après une itération, pour  $i'=i+1$ . Or, on sait par hypothèse que les éléments de `liste[0:i]` sont triés et que les éléments de `liste[i+1:n-1]` sont tous supérieurs à ceux de `liste[0:i]`. Comme on en prend le minimum, ce minimum est donc supérieur aux éléments de `liste[0:i]`, ce qui fait que la liste `liste[0:i']` est bien triée, et comme c'est le minimum de `liste[i+1:n-1]`, tous les éléments de `liste[i'+1:n-1]` sont bien supérieurs à tous les éléments de `liste[0:i']`.

La propriété est donc bien héréditaire.

On en conclut que la propriété est bien un invariant de boucle. Elle est donc vraie après la dernière itération, de quoi on déduit directement que la liste complète est alors triée, et comme c'est une permutation de la liste initiale, il s'agit bien de la liste triée voulue.

L'algorithme est donc valide.

Pour le coût, comme il y a deux boucles imbriquées, à l'intérieur desquels on fait des comparaisons (c'est le nombre de comparaisons que l'on compte pour déterminer le coût des algorithmes de tri), avec des bornes fixes pour la première (allant de 0 à  $n-2$ ), et des bornes allant de  $i$  à  $n-1$  pour l'autre, nous avons déjà vu que cela correspond à un coût quadratique en  $n$ , la longueur de la liste. Autrement dit, il y a un nombre de comparaisons de l'ordre de  $n^2$ , ce qui n'est pas très efficace. Il a l'avantage d'être facile à programmer, et à être suffisant pour de petites listes (disons jusqu'à  $10^4$  éléments).

## 2. Tri par insertion

Il s'agit ici de prendre les cartes à trier une par une, et de les « insérer » au bon endroit dans la partie triée de la liste. C'est une des méthodes naturelles du tri de cartes.

L'élément à insérer est appelé « clé », et il est inséré en décalant tous les éléments qui lui sont supérieurs dans la partie triée de la liste, parcourue de droite à gauche.

L'algorithme est le suivant :

```

Pour i allant de 0 à n-2 Faire
    k ← i+1    (k pour key, indice de la clé)
    cle ← liste[k]
    Tant que cle < liste[k-1] et k > 0 Faire
        liste[k] ← liste[k-1]
        k ← k-1
    Fin Tant que
    liste[k] ← cle
Fin Pour

```

Voir sur [Wikipedia](#) la page du tri par insertion qui en donne quelques animations.

## Exercice 2

Coder cet algorithme dans le langage Python puis le tester (sur de petites listes).

Démontrons là aussi la validité de l'algorithme (sans entrer trop dans les détails).

- Pour la terminaison, on observe qu'une des boucles est une boucle Pour dont le nombre d'itérations est déterminé et fini. La boucle interne est une boucle Tant que. On doit donc trouver un variant. Le variant est tout simplement la variable  $k$ , qui décroît de 1 à chaque itération, et qui donc nécessairement deviendra négatif dans le cas où la première condition de la boucle est vérifiée, ce qui fait que la seconde condition fini par être fausse. Autrement dit il y a au plus  $i+1$  itérations de la boucle Tant que.
- Étudions alors la correction de l'algorithme.

L'invariant que nous utilisons pour la boucle Pour est : « pour chaque  $i$ , la liste est une permutation de la liste initiale et la liste  $\text{liste}[0:i+1]$  est triée »

Le fait que ce soit bien une permutation vient du processus d'insertion utilisé (la partie donnée par la boucle Tant que) : on « écrase » successivement, par la droite, les éléments de la liste par l'élément précédent, en commençant par la clé, mais on insère enfin la clé à sa place. Donc à la fin de la boucle Tant que, tous les éléments de la liste initiale se retrouvent bien dans la liste.

\* De même que pour l'algorithme précédent, on démontre l'initialisation en démontrant qu'après la première itération, la propriété est vraie.

Au premier passage, la variable  $i$  vaut 0 et la clé est la valeur d'indice 1. Après la boucle Tant que, cette clé est insérée au bon endroit par rapport au premier élément. Autrement dit, la liste  $\text{liste}[0:1]$  (indice 1 compris) est bien triée.

\* Si après l'itération pour une valeur  $i$  la propriété est vraie, alors l'élément  $\text{liste}[i+2]$  est dans l'itération suivante inséré (avec la boucle Tant que) au bon endroit dans la liste  $\text{liste}[0:i+1]$  ou reste à sa place (c'est le cas si sa valeur est supérieure à celles de  $\text{liste}[0:i+1]$ ). Ainsi, dans tous les cas la liste  $\text{liste}[0:i+2]$ , autrement dit  $\text{liste}[0:i'+1]$  (où  $i'=i+1$ ), est bien triée.

La propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit qu'elle est effectivement un invariant de boucle. Elle est donc vraie à la sortie de la boucle, d'où l'on déduit que la liste entière est triée.

Pour le coût de l'algorithme, il y a ici aussi deux boucles imbriquées, et nous avons indiqué le pire cas pour la seconde boucle. Ce pire cas est donc d'ordre  $n^2$ . Cependant, dans le meilleur cas, celui où la liste est déjà triée, il n'y a qu'une seule comparaison dans la seconde boucle, autrement dit une seule itération, et globalement l'algorithme devient alors linéaire.

En conséquence, pour une liste presque triée, cet algorithme est efficace. Le pire cas est celui où la liste est triée à l'envers, dans ce cas le coût est vraiment quadratique. En moyenne, le coût de cet algorithme est quadratique.

# VI. Algorithmes gloutons

---

Les termes « algorithme glouton » désignent une stratégie de résolution, consistant à construire une solution pas à pas (autrement dit de manière incrémentale, sans revenir en arrière), en faisant à chaque pas un choix local qui semble optimal.

Cette stratégie s'applique à des problèmes d'optimisation (où l'on cherche une solution optimale, selon un certain critère, à un problème donné) tels que ceux qui sont donnés plus bas. Il est à savoir que de manière générale, certains problèmes d'optimisation admettent des solutions gloutonnes, et d'autres pas (cela peut même dépendre des données du problème).

De plus, il n'est pas évident que l'accumulation des choix localement optimaux conduise nécessairement à une solution globalement optimale. En principe il est donc nécessaire de le démontrer, ce qui peut s'avérer très difficile, mais ce n'est pas l'objet en première (ni en terminale).

Dans certains cas, un algorithme glouton peut donner une approximation de la solution optimale.

Trouver un algorithme glouton peut être difficile, car il faut trouver le bon point de vue qui permet d'obtenir cette optimalité. Nous nous contenterons donc ici de les donner.

Quelques problèmes d'optimisation peuvent être traités (à défaut d'être toujours résolus parfaitement) à l'aide d'une stratégie gloutonne. C'est le cas en particulier du problème de rendu de monnaie, du problème du sac à dos et du problème des tâches. Nous les étudierons en activité ou exercices.