

Variables aléatoires



En cas de besoin : [rappel de première sur les variables aléatoires](#) (vidéo par Yvan Monka)

Exercice 1 (QCM)

Pour chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponse(s) parmi celles proposées.

1. Une variable aléatoire peut prendre comme valeurs :

- (a) uniquement des nombres entiers (c) uniquement des réels positifs
(b) uniquement des réels dans $[0; 1]$ (d) n'importe quel réel

2. X est une variable qui suit la loi de probabilité suivante :

x_i	2	4	5	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,2	0,4	p	0,1

- (a) $p = 0,3$ (c) $p = 0,5$
(b) $p = -0,7$ (d) On ne peut pas connaître la valeur de p

3. X est une variable qui suit la loi de probabilité suivante :

x_i	-4	0	2	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,1	0,5	0,3	0,1

- (a) $\mathbb{P}(X = 0,5) = 0$ (c) $\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X > 0)$
(b) $\mathbb{P}(X \geq 0) = 0,9$ (d) $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2)$

4. Y est une variable qui suit la loi de probabilité suivante :

y_i	5	10	20	30
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,2	0,1	0,5	0,2

- (a) $E(Y) = 1$ (b) $E(Y) = 18$ (c) $E(Y) = 65$ (d) $E(Y) = \frac{65}{4}$

5. Une variable aléatoire Z prend les valeurs $z_1, z_2, \dots, z_n$ telles que $z_1 < z_2 < \dots < z_n$.

- (a) $E(Z)$ est forcément positive (c) $z_1 \leq E(Z) \leq z_n$
(b) $E(Z) \geq n$ (d) On ne peut rien dire sur $E(Z)$

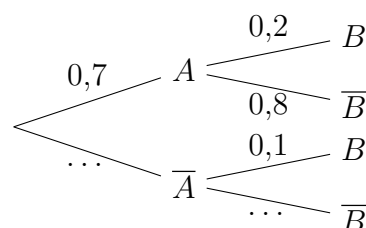
6. X est une variable aléatoire qui prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ et Z est la variable aléatoire vérifiant :

$$Z = 2X - 1$$

- (a) $\mathbb{P}(Z = z_1) = P(X = x_1)$ (d) $E(Z) = 2E(X)$
(b) $\mathbb{P}(Z = z_1) = 2\mathbb{P}(X = x_1) - 1$ (e) $E(Z) = 2E(X) - 1$
(c) $E(Z) = E(X)$

7. Une expérience aléatoire est modélisée à l'aide de l'arbre ci-dessous.

- (a) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,9$
(b) $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = 0,03$
(c) $\mathbb{P}(B) = 0,3$
(d) $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = 0,15$



8.

Dans le tableau ci-contre, les nombres p sont rangés dans l'ordre croissant.

- (a) La plus grande valeur de p inférieure à 0,5 a pour rang 5.
- (b) La plus grande valeur de p inférieure à 0,95 a pour rang 9.
- (c) La plus petite valeur de p supérieure à 0,95 a pour rang 9.
- (d) La plus grande valeur de p inférieure à 0,01 a pour rang 3.

Rang	p
0	0,001
1	0,006
2	0,031
3	0,091
4	0,191
5	0,362
6	0,612
7	0,792
8	0,912
9	0,977
10	0,999
11	1

Exercice 2 (Vrai ou Faux)

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X et on considère la variable aléatoire Y vérifiant $Y = 3X + 2$.

x_i	-5	-2	0	3	6
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	0,4	0,05	0,25		0,1

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (et justifier).

- 1. $\mathbb{P}(X = 3) = 0,2$
- 2. $E(X) = -0,9$
- 3. $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0,45$
- 4. $\sigma(X) = 2,9$
- 5. $\mathbb{P}(X > -2) = 1 - \mathbb{P}(X = -5)$
- 6. $E(Y) = 3,3$

Exercice 3

Le foyer des élèves du lycée organise une tombola pour financer un nouveau billard. Il met en vente 400 tickets, au prix de 5 euros chacun. Parmi ces tickets, 20 font gagner un lot de 10 euros, 40 font gagner un lot de 20 euros et 15 font gagner un lot de 40 euros. Tous les autres tickets sont perdants. Une personne achète, au hasard, un ticket.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (c'est à dire éventuellement négatif) du ticket, en euro.

- 1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
- 2. Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 15)$ puis $\mathbb{P}(X < 30)$.

Interpréter ces deux probabilités.

- 4. Déterminer puis interpréter l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

Exercice 4

Un professeur de mathématiques propose à ses élèves, pour évaluer leurs connaissances, un QCM composé de trois questions. Chaque question comporte quatre propositions dont une seule est exacte. Bastien, peu enclin à réfléchir ce matin-là, fait confiance à sa « bonne étoile » et décide de répondre au hasard et de manière indépendante à chacune des trois questions posées.

- 1. En exploitant un arbre de probabilités, déterminer :
 - (a) la probabilité que Bastien réponde correctement aux trois questions ;
 - (b) la probabilité que Bastien donne trois réponses inexactes ;
 - (c) la probabilité que Bastien donne une réponse exacte et deux inexactes.

2. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de réponses exactes de Bastien à l'issue du QCM. Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer son espérance.

Info : On répète ici trois fois **la même expérience aléatoire** qui aboutit à **deux issues** qu'on peut appeler **Succès** (Bastien répond correctement à la question) **et Échec** (Bastien ne répond pas correctement). Une telle expérience est appelée **épreuve de Bernoulli**.

La variable aléatoire X compte le nombre de Succès à l'issue des trois épreuves de Bernoulli.

La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres :

- $n = 3$ (trois épreuves) ;
- $p = \frac{1}{4}$ (probabilité de Succès).

3. Le professeur utilise le barème suivant pour évaluer le travail de ses élèves : toute bonne réponse est gratifiée de deux points et toute mauvaise réponse est sanctionnée d'un point. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre (algébrique, c'est à dire éventuellement négatif) de points obtenus à l'issue du QCM. Calculer l'espérance de Y et en donner une interprétation.