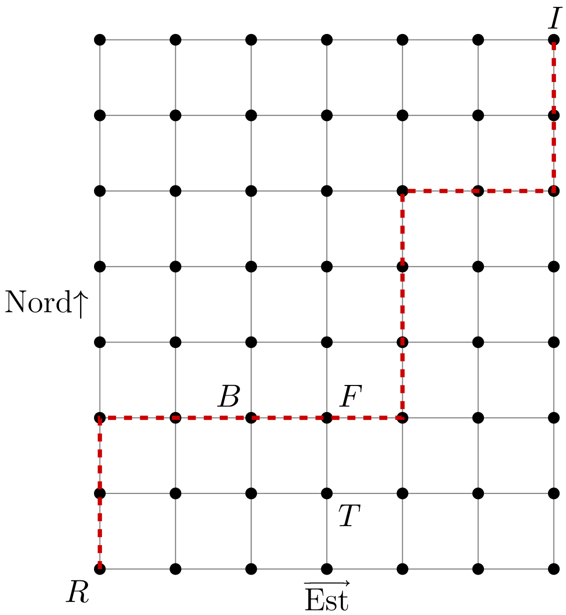
Sonia participe à un échange franco-américain à Manhattan, quartier de New York où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Chaque matin, elle étudie dans un institut de langues I situé à 6 pâtés de maison à l'est et 7 pâtés de maison au nord de son lieu de résidence R.
Pour se rendre à l'institut, elle parcourt alors la longueur de 13 pâtés de maison (elle se dirige uniquement vers le nord et l'est). L'objectif de cette activité est de déterminer le nombre de chemins possibles qui mènent du point R au point I (on a représenté l'un de ces chemins).



1. **Étude de cas particuliers**
   À proximité de son lieu de résidence, Sonia fréquente régulièrement une bibliothèque, un salon de thé et une salle de fitness matérialisée par B, T et F sur le plan ci-contre.
   (a) Déterminer le nombre de chemins qui mènent du point R au point B, puis le nombre de chemins qui mènent du point R au point T.
   (b) En déduire le nombre de chemins qui mènent du point R au point F.
2. **Notion de coefficient binomial**
   (a) Tout chemin du point R au point B compte exactement 2 déplacements vers l'est parmi les 4 déplacements. Le nombre total de tels chemins se note $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.
   D'après ce qui précède, quelle est la valeur de $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$?
   (b) De même, préciser la valeur de $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.
   Quelle relation peut-on écrire entre ces trois coefficients binomiaux ?
3. En exploitant la relation précédente à d'autres points du plan, répondre au problème posé.

Correction

1. (a) De R à B, on peut compter 6 chemins.
   De R à T, on peut compter 4 chemins.
   (b) Pour aller de R à F, on passe soit par B, soit par T (les chemins étant nécessairement distincts, puisque l'on ne peut pas passer à la fois par B et par F).
   Ainsi, le nombre de chemins est 6+4=10.
2. (a) D'après les questions précédentes, $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 6$ (nombre de chemins de R à B).
   (b) Le nombre $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est le nombre de chemins de R à T, donc vaut 4.
   Le nombre $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ est le nombre de chemins de R à F, donc vaut 10.
   On a alors la relation suivante : $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
3. On peut faire un tableau calqué sur le plan, en indiquant le nombre de chemins allant de R au point donné du plan. Sur les bords, il n'y a toujours qu'un seul chemin, donc les nombres sont tous égaux à 1. Pour les points intérieurs, on applique la formule que l'on peut généraliser : $\begin{pmatrix}n+1\\k+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}n\\k+1\end{pmatrix}$.
   Autrement dit, un nombre est la somme de celui qui est à sa gauche et celui qui est en dessous.
   Le nombre cherché, tout en haut à droite, est $\begin{pmatrix}13\\6\end{pmatrix} = 1716$

1	8	36	120	330	792	1716
1	7	28	84	210	462	924
1	6	21	56	126	252	462
1	5	15	35	70	126	252
1	4	10	20	35	56	84
1	3	6	10	15	21	28
1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1