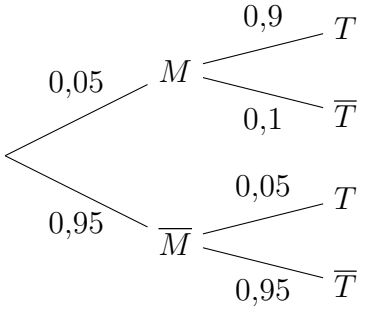
Devoir maison n°3
Correction

Exercice 1

Partie A – Étude du cas de la Guinée

1. L'arbre est le suivant :



2. On veut :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T) &= \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T)\\ &= \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M}) \times \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)\\ &= 0{,}05 \times 0{,}9 + 0{,}95 \times 0{,}05\\ &= 0{,}045 + 0{,}0475\\ &= 0{,}0925\end{aligned}$$

3. On veut tout d'abord $\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \dfrac{0{,}045}{0{,}0925} \simeq 0{,}486$

   Cela signifie que la probabilité qu'un sujet soit souffrant de la maladie sachant qu'il a été testé positif est de 0,486.

   Autrement dit, un individu qui a été testé positif a 48,6% de « chance » d'être malade.

   On veut également $\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{M} \cap \overline{T})}{\mathbb{P}(\overline{T})} = \dfrac{0{,}95 \times 0{,}95}{1 - 0{,}0925} = \dfrac{0{,}9025}{0{,}9075} \simeq 0{,}9945$

   Cela signifie que la probabilité qu'un sujet soit sain sachant qu'il a été testé négatif est de 0,9945.

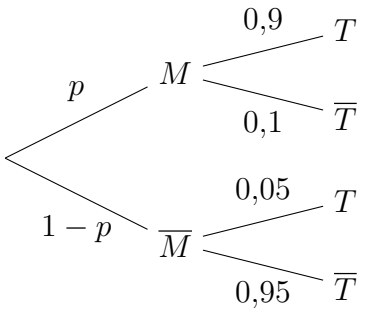
   Autrement dit, un individu qui a été testé négatif a 99,45% de chance d'être sain.

4. On a :

$$\begin{aligned}p_e = \mathbb{P}(\text{« le test commet une erreur »}) &= \mathbb{P}(M \cap \overline{T}) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T)\\ &= 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}95 \times 0{,}05\\ &= 0{,}005 + 0{,}475\\ &= 0{,}0525\end{aligned}$$

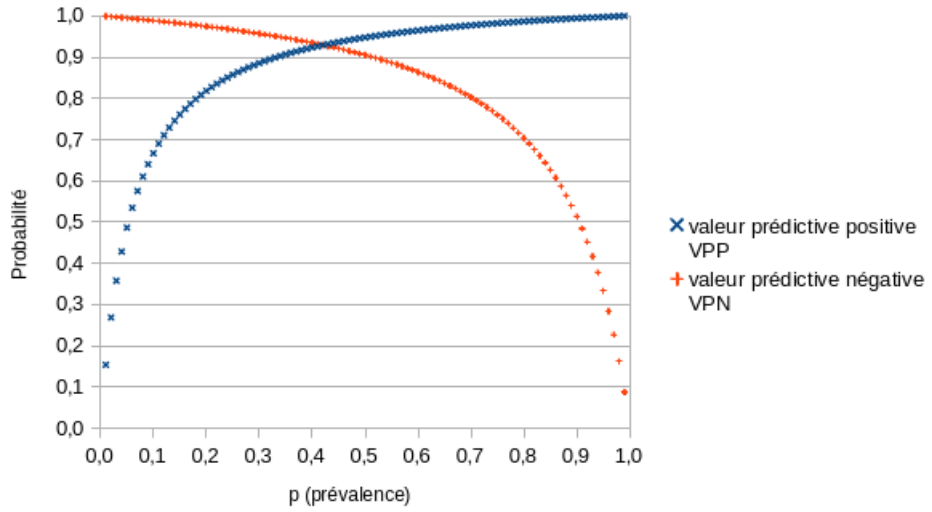
Partie B – Influence de la prévalence sur les résultats du test Luminex®

1. Ici, l'arbre est ainsi :



Le même calcul que précédemment, mais avec p et $(1-p)$ donne :
$\mathbb{P}(T) = p \times 0{,}9 + (1-p) \times 0{,}05 = 0{,}05 + 0{,}85p$.

2. Par suite, $\mathbb{P}(\overline{T}) = 1 - \mathbb{P}(T) = 1 - (0{,}05 + 0{,}85p) = 0{,}95 - 0{,}85p$.
3. La valeur prédictive positive est :
$\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \dfrac{p \times 0{,}9}{0{,}05 + 0{,}85p} = \dfrac{0{,}9p}{0{,}85p + 0{,}05}$.
La valeur prédictive négative est :
$\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{M}) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{M} \cap \overline{T})}{\mathbb{P}(\overline{T})} = \dfrac{0{,}95(1-p)}{0{,}95 - 0{,}85p}$
4. (a) Voir le fichier de tableur.
   (b) Il suffit de choisir les cellules A2 et A3, puis de les étirer vers le bas jusqu'à la valeur 0,99 (en cellule A100).
   (c) Formule en B2 : `=0,9*A2/(0,85*A2+0,05)`
   Formule en C2 : `=0,95*(1-A2)/(0,95-0,85*A2)`
   Ensuite, on peut sélectionner les cellules B2 et C2 et étirer jusqu'à la ligne 100.
   Pour avoir l'affichage donné, on peut définir le format des cellules et limiter le nombre de décimales à 9 pour les colonnes B et C et à 2 pour la colonne A.
   (d) On peut construire le diagramme suivant :



   (e) Quand la prévalence augmente, la valeur prédictive positive augmente (fortement au début, puis plus lentement).
   Dans le même temps, la valeur prédictive négative diminue (faiblement au début, puis fortement).

5. (a) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(p) = 0{,}9p$ et $v(p) = 0{,}85p + 0{,}05$.
   Alors $u'(p) = 0{,}9$ et $v'(p) = 0{,}85$.
   Par suite, $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   Donc $f'(p) = \dfrac{0{,}9(0{,}85p + 0{,}05) - 0{,}9p \times 0{,}85}{(0{,}85p + 0{,}05)^2} = \dfrac{0{,}045}{(0{,}85p + 0{,}05)^2}$.
   Le carré étant positif, ainsi que 0,045, on en déduit que f' est toujours positive, et donc f est bien croissante.
   (b) La fonction f exprime la valeur prédictive positive du test.
   On vient de montrer que plus la prévalence augmente, plus la valeur prédictive positive, autrement dit la probabilité d'être malade lorsque le test est positif, augmente.

Partie C – Comparaison de deux tests

D'après le tableau, $\mathbb{P}_M(T) = 0{,}95$ (sensibilité meilleure) et $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}9$ (spécificité moins bonne).

Affirmation 1 : Un individu malade est mieux détecté par le test Elisa que par le test Luminex®.

L'affirmation est **vraie**, car la sensibilité est meilleure.

Affirmation 2 : La probabilité d'erreur avec le test Elisa est plus faible qu'avec le test Luminex®.

Il faut calculer pour le test Elisa :

$p_e = \mathbb{P}(M \cap \overline{T}) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) = 0{,}05 \times 0{,}05 + 0{,}95 \times 0{,}10 = 0{,}0975$.

La valeur est supérieure à celle du test Luminex®.

L'affirmation est donc **fausse**.

Affirmation 3 : Au Zaïre où la prévalence de l'infection au virus Ebola était plus élevée qu'en Guinée, la valeur prédictive positive avec le test Elisa est plus élevée qu'en Guinée.

L'affirmation est **vraie** : pour un même test, on a vu que lorsque la prévalence p augmente, la VPP augmente (bien que la fonction n'ait pas la même expression lorsque la sensibilité et la spécificité changent).