

Devoir surveillé n°2
Correction

Exercice 1

1. On a $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ qui est du second degré.

On calcule : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1 = 1^2 > 0$.

f a donc deux racines : $x_1 = \frac{-(-5) - 1}{2 \times 2} = \frac{5 - 1}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{5 + 1}{4} = \frac{3}{2}$.

De plus, $a = 2 > 0$, donc on obtient :

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

2. On a $g(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 1}{5 - 2x}$ qui est une fraction.

- Le numérateur, $-3x^2 + 2x - 1$ est du second degré.

On calcule donc $\Delta = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 4 - 12 = -8 < 0$.

Donc l'expression n'a pas de racine et est toujours du signe de $a = -3$, donc négative.

- Le dénominateur, $5 - 2x$ est affine, donc on résout :

$$5 - 2x > 0 \Leftrightarrow 5 > 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} > x$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$$

Par conséquent :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-3x^2 + 2x - 1$	$-$	$-$	$-$
$5 - 2x$	$+$	0	$-$
signe de $g(x)$	$-$		$+$

Exercice 2

On a $h(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$, donc h est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = x^2 + 3$.

Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$. Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, donc :

$$h'(x) = \frac{1(x^2+3) - (x-1)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2+2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

- Le dénominateur, $(x^2+3)^2$, est un carré, donc toujours positif.
- Le numérateur, $-x^2+2x+3$, est une expression polynomiale de degré 2.

On calcule : $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.

Il y a donc deux racines : $x_1 = \frac{-2-4}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1$.

De plus, $a = -1 < 0$.

Par conséquent, on obtient le tableau suivant :

x	-4	-1	3	4	
$-x^2 + 2x + 3$	-	0	+	0	-
$(x^2 + 3)^2$	+		+		+
signe de $h'(x)$	-	0	+	0	-
variations de h	$-\frac{5}{19} \searrow -\frac{1}{2} \nearrow \frac{1}{6} \searrow \frac{3}{19}$				

Exercice 3

- On a $f(x) = (7 - 4x)e^{-2x}$, donc f est de la forme uv avec $u(x) = 7 - 4x$ et $v(x) = e^{-2x}$.
 Alors $u'(x) = -4$ et $v'(x) = -2e^{-2x}$ (forme $w'e^w$).
 Or $(uv)' = u'v + uv'$ donc $f'(x) = -4e^{-2x} + (7 - 4x)(-2e^{-2x})$.
 On factorise : $f'(x) = e^{-2x}(-4 - 2(7 - 4x)) = e^{-2x}(-4 - 14 + 8x) = e^{-2x}(8x - 18)$.
 Or $2(4x - 9) = 8x - 18$, donc on a bien $f'(x) = 2e^{-2x}(4x - 9)$.
- f' est sous la forme d'un produit, avec :
 - $2 > 0$
 - e^{-2x} toujours positive (c'est une exponentielle)
 - $4x - 9 > 0 \Leftrightarrow 4x > 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$

Ainsi :

x	0	$\frac{9}{4}$	4
2e^{-2x}	+		+
$4x - 9$	-	0	+
signe de $f'(x)$	-	0	+
variations de f	7 -0,022 -0,003		

- Étudions la situation sur les deux intervalles :

- Sur $\left[\frac{9}{4}; 4\right]$: f est strictement négative (maximum égal environ à $-0,003$), donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Sur $\left[0; \frac{9}{4}\right]$:
 - * f est continue car dérivable ;
 - * f est strictement décroissante ;
 - * $f(0) = 7 > 0$ et $f\left(\frac{9}{4}\right) \simeq -0,022 < 0$.

Alors, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 4]$.