

Devoir surveillé n°5
Correction**Exercice 1**

1. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3-2n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n-27 = +\infty$. Alors par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3-2n)(n-27) = -\infty$.
2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$. Alors par opérations, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{7}{2+0} = \frac{7}{2} = 3,5$.
3. Comme $\frac{3}{2} > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

Exercice 2

1. On a une forme indéterminée $-\infty + (+\infty)$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^2 = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 15n + 3 = +\infty$.
2. On factorise par n^2 , la plus grande puissance de n :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 \left(-2 + \frac{15n}{n^2} + \frac{3}{n^2} \right) \\ &= n^2 \left(-2 + \frac{15}{n} + \frac{3}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{15}{n} + \frac{3}{n^2} = -2$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. La limite de u étant infinie, la suite ne converge pas, elle diverge.

Exercice 3

On commence par encadrer $\sin(n)$:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(n) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin(n) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq 3\sin(n) - 2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5}{n+1} \leq \frac{3\sin(n) - 2}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{-5}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

1. Diminuer de 25% revient à multiplier par $\left(1 - \frac{25}{100}\right) = 0,75$, d'où le « $0,75u_n$ ». D'autre part, chaque année 12 nouveaux adhérents arrivent, donc on a bien $u_{n+1} = 0,75u_n + 12$.
2. Soit v la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = u_n - 48$.
 - (a) On exprime :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 48}{u_n - 48} \\
&= \frac{0,75u_n + 12 - 48}{u_n - 48} \\
&= \frac{0,75u_n - 36}{u_n - 48} \\
&= \frac{0,75 \left(u_n - \frac{36}{0,75} \right)}{u_n - 48} \\
&= \frac{0,75(u_n - 48)}{u_n - 48} \\
&= 0,75 \text{ constante}
\end{aligned}$$

La suite v est donc bien géométrique.

Sa raison est $q = 0,75$, et son premier terme est $v_0 = u_0 - 48 = 900 - 48 = 852$.

(b) On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = 852 \times 0,75^n$.

Or, $v_n = u_n - 48$, donc $u_n = v_n + 48 = 852 \times 0,75^n + 48$.

3. Comme $0 < 0,75 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$.

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 852 \times 0 + 48 = 48$.

À long terme, le nombre d'adhérents de l'association devrait stagner vers 48.

4. Il suffit d'utiliser la calculatrice : on observe que pour $n = 6$, $u_n < 200$.

Donc c'est au bout de 6 ans que l'association sera dissoute.