Devoir surveillé n°6
Correction

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{aligned} 3\ln(x)+9=0 &\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{-9}{3}=-3 \\ &\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-3} \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{S}=\{\mathrm{e}^{-3}\}$

2. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x+1}-2<0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1}<2 \\ &\Leftrightarrow x+1<\ln(2) \\ &\Leftrightarrow x<\ln(2)-1 \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{S}=]-\infty;\ln(2)-1[$

Exercice 2

L'expression donnée étant un produit, on étudie le signe de chacun de ses facteurs :

- $\mathrm{e}^x+2>0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x>-2$. Or, quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x>0$, donc $\mathrm{e}^x>-2$ est toujours vrai : l'expression est toujours positive.
  On peut aussi dire que, comme quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x>0$, en particulier $\mathrm{e}^x+2\geqslant 2>0$.
- $\ln(x)-1>0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>\mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x>\mathrm{e}$.

On obtient alors le tableau de signes :

x	0		e		$+\infty$
e^x+2	‖	$+$		$+$	
$\ln(x)-1$	‖	$-$	0	$+$	
signe de $f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 3

1. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\ln(x)-5$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\ln(x)$ donc $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.
   Or, $f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, donc $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\ln(x)-(\ln(x)-5)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{5}{x(\ln x)^2}$
2. g est de la forme $\ln u$ avec $u(x)=x^2-3$ donc $u'(x)=2x$.
   Or $g'=(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, donc $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$.