

Devoir surveillé n°7
Correction

Exercice 1

1. La forme est indéterminée
- $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
- .

On factorise donc au numérateur et au dénominateur par les puissances de x les plus grandes :

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 15x + 3}{2x^3 + 1} &= \frac{x^2 \left(1 - \frac{15}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^3 \left(2 + \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{15}{x} + \frac{3}{x^2}}{x \left(2 + \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1 - \frac{15}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^3}}\end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{15}{x} + \frac{3}{x^2} = 1 - 0 + 0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x^3} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 15x + 3}{2x^3 + 1} = 0 \times \frac{1}{2} = 0$.

Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2. On a
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = 0 - 1 = -1$
- et
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{1}{x^2} = 5 + 0 = 5$
- .

Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) \left(5 + \frac{1}{x^2}\right) = -1 \times 5 = -5$

Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = -5$ en $-\infty$.

3. On a
- $3 - x > 0 \Leftrightarrow 3 > x \Leftrightarrow x < 3$
- . Ainsi,
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} 3 - x = 0^+$
- .

De plus, $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{2x - 1}{3 - x} = +\infty$.

Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

4. On a ici une forme indéterminée
- $(-\infty + \infty)$
- . On doit donc factoriser par la plus grande puissance de
- x
- :

$$-3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3 + 0 + 0 + 0 = -3$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = +\infty$.

Pas d'asymptote ici.

Exercice 2

1. On a $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}\ln x < x &\Leftrightarrow -\ln x > -x \\ &\Leftrightarrow 2x - \ln x > 2x - x \\ &\Leftrightarrow f(x) > x\end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$,
on peut déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par comparaison.

3. On a $f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$.

4. On sait que $x > 0$, donc le dénominateur est toujours positif.

D'autre part, $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Ainsi :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	—	0	+
x	+	+	+
signe de $f'(x)$	—	0	+
variations de f	$+\infty \searrow \simeq 1,69 \nearrow +\infty$		