

Modèles fonctionnels



Exercice 1 (Dérivation – révision de première)

Dans chaque cas, dériver la fonction f .

1. $f(x) = 3x - 2$
2. $f(x) = -x^2 + 5x + 256$
3. $f(t) = 3t^2 - t - 2$
4. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{6} + x - 4$
5. $f(x) = -\frac{3x^4}{5} + \frac{3x^2}{4} + 1$
6. $f(x) = \frac{3}{x}$
7. $f(t) = 2\sqrt{t}$
8. $f(x) = \sqrt{x} - x^3 - 3x + \frac{4}{x}$
9. $f(x) = x\sqrt{x}$
10. $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$
11. $f(x) = (5x - 3)(4x^2 + 2)$
12. $f(x) = \frac{5x - 2}{2x + 3}$
13. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
14. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

Exercice 2 (Dérivation)

Dans chaque cas, on définit une fonction f sur un ensemble D . Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{2}{x} - 3x^2 + 4\sqrt{x}$ sur $D =]0; +\infty[$.
3. $f(x) = 5e^x - x + 3$ sur $D = \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Dérivation – formules de terminale)

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction dérivée (sur $D = \mathbb{R}$).

1. $f(x) = (4x + 1)^2$
2. $f(x) = (-6x + 1)^2$
3. $f(x) = (e^x + 1)^2$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^3$
5. $f(x) = \sqrt{5x + 6}$
6. $f(x) = e^{-x^2 + x + 1}$
7. $f(x) = 5e^{2x+4}$
8. $f(x) = -4e^{x^2}$

Exercice 4 (Dérivation – mélange)

Dans chaque cas, on définit une fonction f sur un ensemble D . Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

1. $f(x) = (2x^3 - 3)^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 4(-4x^2 + 3x + 5)^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 2(x - 1)^3 + 0,5x + 2$ sur $D = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 6}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
5. $f(x) = \frac{-2x + 1}{x^2 + 1}$ sur $D = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 8}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
7. $f(x) = 3e^{-x^2}$ sur $D = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = 4 - 3e^{-0,1x+3}$ sur $D = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \sqrt{5x + 10}$ sur $D =]-2; +\infty[$.
10. $f(x) = (2x + 1)e^{-0,5x}$ sur $D = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = (0,5x - 1)e^{3x+1}$ sur $D = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \frac{x + 1}{e^{2x}}$ sur $D = \mathbb{R}$.

Exercice 5 (Signe)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-3x + 1)e^{-x}$.

Le tableau de signes ci-dessous comporte des erreurs. Les corriger.

x	$-\infty$	0,33	$+\infty$
e^{-x}		—	
$-3x + 1$	+	0	—
$f(x)$	—	0	+

Exercice 6 (Signe)

Obtenir, dans chaque cas, le tableau de signes de la fonction f définie par son expression sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5x^2 - 5x - 10$

4. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \quad (x \neq -1)$

2. $f(x) = -0,3x^2 + 1,8x - 1,5$

5. $f(x) = 3e^{2x} - 3$

3. $f(x) = (-3x+1)(2x+8)$

6. $f(x) = 2e^{-0,1x} + 1$

Exercice 7 (Variations)

Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur un intervalle I . Justifier que f est monotone sur I .

1. $f(x) = \sqrt{-3x+9}$ sur $I =]-\infty; 3]$.

4. $f(x) = \frac{-5x+2}{2x+4}$ sur $I =]-2; +\infty[$.

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = 3e^{-0,1x} + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = 10 - 4e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 8 (Variations)

Soit h la fonction définie sur $I = [-2; 2]$ par $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in I$, $h'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

2. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h sur $[-2; 2]$, en précisant les extrema.

Exercice 9 (Variations)

Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur un intervalle I . Construire le tableau de variations de f sur I .

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$
sur $I = [-3; 6]$.

2. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$
sur $I = [-2; 4]$.

3. $f(x) = 2xe^{-x}$
sur $I = [-5; 5]$.

Exercice 10 (Variations)

Étudier dans chaque cas les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (déjà dérivée dans l'exercice 4).

1. $f(x) = (2x+1)e^{-0,5x}$

2. $f(x) = (0,5x-1)e^{3x+1}$

3. $f(x) = \frac{x+1}{e^{2x}}$

Exercice 11 (Tangente)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^3+x^2}$.

1. Dresser le tableau de variations de f .

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative sur f au point d'abscisse -1 .

Exercice 12 (Tangente)

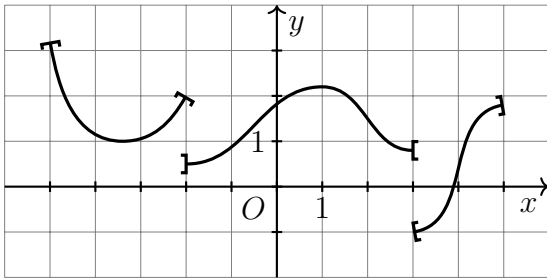
Dans chaque cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .

1. $f(x) = \frac{4x+1}{e^x}$; $a = 0$

2. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$; $a = 1$

Exercice 13 (Continuité)

On considère une fonction f définie sur $[-5; 5]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est la suivante :



La fonction est-elle continue :

1. En 3 ?
2. En 1 ?
3. sur $[-3; 3]$?
4. sur $] -2; 3[$?
5. sur $[-5; 2]$?

Exercice 14 (TVI)

On considère une fonction f continue dont on donne ci-dessous le tableau de variations :

x	-10	-5	1	2	4	5
$f(x)$	3	0	-2	0	2	1

On pourra répondre aux questions suivantes sans justifier.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$?
2. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$?
3. Établir le tableau de signes de la fonction f .

Exercice 15 (TVI)

Soit g la fonction définie sur $[-3; 6]$ par : $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 8$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g .
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-3; 6]$.
Déterminer un encadrement de α au millièmes près.
3. En déduire le tableau de signes de g sur $[-3; 6]$.

Exercice 16 (TVI)

Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par : $f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 2x + 3$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. Déterminer, en justifiant, le nombre de solution des équations suivantes :

(a) $f(x) = 3$

(b) $f(x) = 1$

(c) $f(x) = 6$

Exercice 17 (TVI)

Soit f la fonction définie sur $[-2; 1]$ par : $f(x) = e^{3x} - 3x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur $[-2; 1]$.
3. Donner une valeur approchée au centième de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Exercice 18 (TVI)

Démontrer que l'équation $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et encadrer celle-ci par deux entiers consécutifs.

Indication : trouver un intervalle $[a; b]$ dans lequel se trouve cette solution, le démontrer, puis démontrer qu'il n'en existe pas au-delà.

Exercice 19 (TVI)

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

L'équation $f(x) = 1$ admet-elle des solutions ? Justifier.

Exercice 20 (TVI)

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f .
Déterminer, suivant la valeur du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

x	-5	1	7
$f(x)$	3	-2	5

Exercice 21 (TVI – prix d'équilibre)

Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse, sur une année, 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75€. On estime que les fonctions d'offre f et de demande g sont définies sur $[15; 75]$ par :

$$f(x) = 55,8x + 1\,340 \quad \text{et} \quad g(x) = -0,03x^3 + 5x^2 - 300x + 8\,790$$

où x est le prix d'un livre, en euro.

Cela signifie que lorsqu'un livre coûte x euro, l'éditeur est prêt à vendre $f(x)$ livres et les consommateurs sont prêts à acheter $g(x)$ livres.

- (a) Calculer $f(30)$ et $g(30)$. Interpréter les valeurs obtenues.

L'offre est-elle supérieure à la demande ?

- (b) Mêmes questions avec $f(50)$ et $g(50)$.

- Étudier les variations de f sur $[15; 75]$. Interpréter.

- Étudier les variations de g sur $[15; 75]$. Interpréter.

- On appelle **prix d'équilibre** le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

Après avoir justifié que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution x_0 sur $[15; 75]$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_0 , arrondie au centime d'euro près.

Quelles sont alors l'offre et la demande ? Arrondir à l'unité.

Exercice 22 (Convexité – graphique)

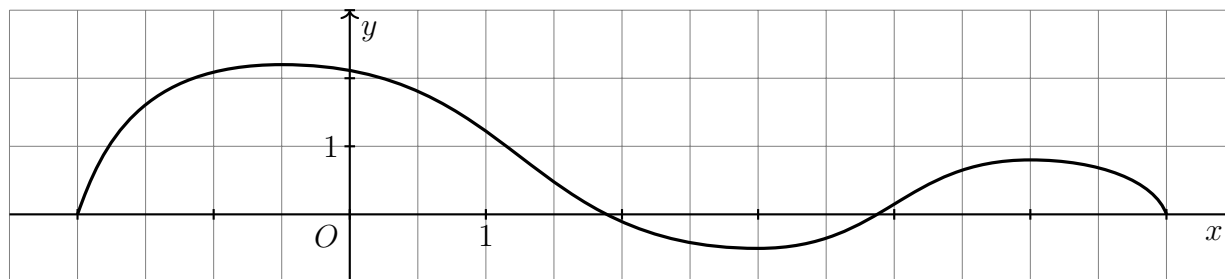
Soit f la fonction dérivable sur $[-1; 6]$ dont la courbe représentation $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



- Étudier (graphiquement) la convexité de f sur $[-1; 6]$.
- Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.

Exercice 23 (Convexité – graphique)

Soit g la fonction dérivable sur $[-2; 6]$ dont la courbe représentation $\mathcal{C}_g$ est donnée ci-dessous.



1. Étudier (graphiquement) la convexité de g sur $[-2; 6]$.
2. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.

Exercice 24 (Convexité – relation avec la dérivée)

Reprendre les deux exercices précédents et indiquer les variations de la fonction dérivée

Exercice 25 (Convexité – relation avec la dérivée)

On considère quatre fonctions dérivables f , g , h et k , dont on donne ci-dessous les tableaux de variations, ainsi que ceux de leurs dérivées.

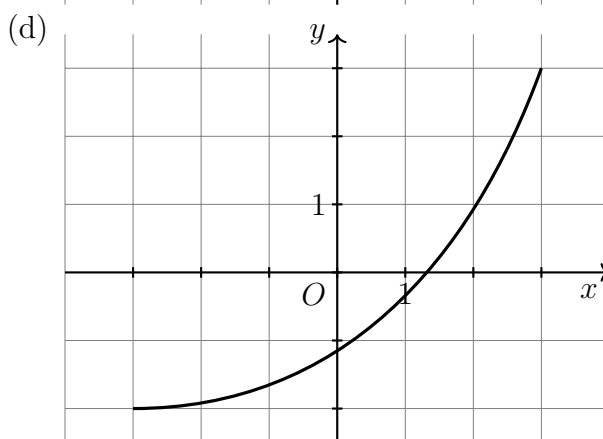
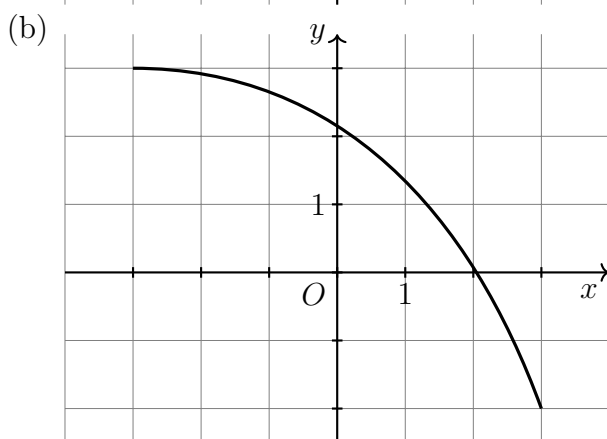
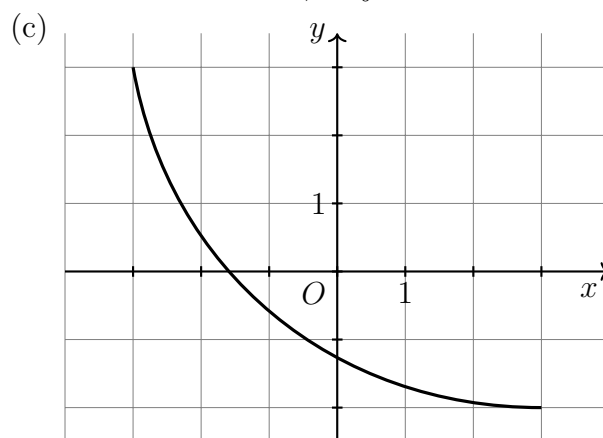
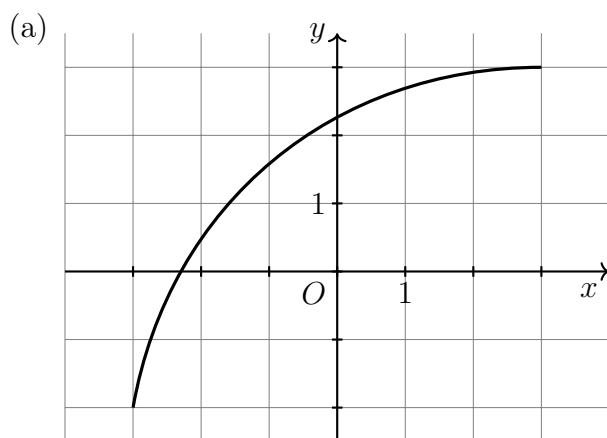
x	-3	3
$f'(x)$		
$f(x)$	-2	3

x	-3	3
$g'(x)$		
$g(x)$	-2	3

x	-3	3
$h'(x)$		
$h(x)$	3	-2

x	-3	3
$k'(x)$		
$k(x)$	3	-2

1. Leurs courbes sont données ci-dessous. Associer fonctions et courbes, en justifiant.



2. Préciser la convexité des fonctions f , g , h et k .

Exercice 26 (Convexité – calculs)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2$.

1. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 (Convexité – calculs)

Soit f la fonction définie sur $[1; 5]$ par $f(x) = \frac{3}{x+2}$.

1. Étudier les variations de f .
2. Étudier la convexité de f .

Exercice 28 (Convexité – calculs)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-5x+1}$.

1. Déterminer le signe de f
2. Déterminer les variations de f
3. Déterminer la convexité de f .
4. Déterminer le signe de f'
5. Déterminer les variations de f'
6. Déterminer la convexité de f' .

Exercice 29 (Convexité – calculs)

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,5x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -0,5x^2 - x + 3,5$.

1. Étant donné que ces deux fonctions sont polynomiales de degré 2, indiquer l'apparence de leurs courbes représentatives en justifiant.
Conjecturer alors la convexité de ces deux fonctions.
2. (a) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
(b) Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$.
(c) Démontrer alors les conjectures précédentes.

Exercice 30 (Convexité – calculs)

Soit f la fonction définie sur $[-1; 8]$ par : $f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}$.

On admet les résultats suivants :

$$f'(x) = -5 \times \frac{x-2}{(x+2)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = 10 \times \frac{x-4}{(x+2)^4}$$

1. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-1; 8]$.
2. Déterminer la convexité de f .
3. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de la courbe représentative de f .

Exercice 31 (Convexité – calculs)

Déterminer la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^4 - 3x + 2$
2. $f(x) = 10e^{-0,5x} + 2$
3. $f(x) = -2x^2 + 3$
4. $f(x) = -5e^{3x} + 4$

Exercice 32 (Convexité – calculs)

Déterminer la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$. Préciser leur(s) point(s) d'inflexion.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$
2. $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$
3. $f(x) = (x-1)^3 + 2$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
5. $f(x) = e^{-x^2}$
6. $f(x) = xe^{-x}$