

Modèles fonctionnels

Correction partielle



Exercice 4 (Dérivation – mélange)

1. $f(x) = (2x^3 - 3)^2$: f est de la forme u^2 avec $u(x) = 2x^3 - 3$.

Alors $u'(x) = 6x^2$. Or $(u^2)' = 2u'u$, donc $f'(x) = 2(6x^2)(2x^3 - 3) = 12x^2(2x^3 - 3)$.

2. $f(x) = 4(-4x^2 + 3x + 5)^2$: f est de la forme $4u^2$ avec $u(x) = -4x^2 + 3x + 5$.

Alors $u'(x) = -8x + 3$. Or $(4u^2)' = 4 \times 2u'u$ donc $f'(x) = 4 \times 2(-8x + 3)(-4x^2 + 3x + 5) = 8(-8x + 3)(-4x^2 + 3x + 5)$.

3. $f(x) = 2(x - 1)^3 + 0,5x + 2$: f est de la forme $2u^3 + v$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = 0,5x + 2$.

Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 0,5$. Or $(2u^3 + v)' = 2 \times 3u^2u' + v'$, donc

$f'(x) = 2 \times 3 \times 1 \times (x - 1)^2 + 0,5 = 6(x - 1)^2 + 0,5$.

4. $f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 6}$: f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = 3x + 6$.

Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3$. Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc $f'(x) = \frac{2(3x + 6) - (2x + 1)3}{(3x + 6)^2} = \frac{6x + 12 - 6x - 3}{(3x + 6)^2} = \frac{9}{(3x + 6)^2} = \frac{1}{(x + 2)^2}$.

5. $f(x) = \frac{-2x + 1}{x^2 + 1}$: f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = -2x + 1$ et $v(x) = x^2 + 1$.

Alors $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 2x$. Or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc $f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1) - (-2x + 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{(x^2 + 1)^2}$.

6. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 8}$: f est de la forme $\frac{u}{v}$...

$f'(x) = \frac{2x(2x - 8) - (x^2 - 3)2}{(2x - 8)^2} = \frac{2x^2 - 16x + 6}{(2x - 8)^2}$

7. $f(x) = 3e^{-x^2}$: f est de la forme $3e^u$ avec $u(x) = -x^2$.

Alors $u'(x) = -2x$. Or $(3e^u)' = 3u'e^u$, donc $f'(x) = 3(-2x)e^{-x^2} = -6xe^{-x^2}$.

8. $f(x) = 4 - 3e^{-0,1x+3}$: f est de la forme $4 - 3e^u$ avec $u(x) = -0,1x + 3$.

Alors $u'(x) = -0,1$. Or $(4 - 3e^u)' = -3u'e^u$, donc $f'(x) = -3(-0,1)e^{-0,1x+3} = 0,3e^{-0,1x+3}$.

9. $f(x) = \sqrt{5x + 10}$: f est de la forme \sqrt{u} avec $u(x) = 5x + 10$.

Alors $u'(x) = 5$. Or $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x + 10}}$.

10. $f(x) = (2x + 1)e^{-0,5x}$: f est de la forme uv avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = e^{-0,5x}$.

Alors $u'(x) = 2$. La fonction v est, elle, de la forme e^w avec $w(x) = -0,5x$.

Alors $w'(x) = -0,5$. Or $(e^w)' = w'e^w$, donc $v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$.

Par suite, $(uv)' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = 2e^{-0,5x} + (2x + 1)(-0,5e^{-0,5x})$.

On peut factoriser par $e^{-0,5x}$:

$f'(x) = e^{-0,5x}(2 - 0,5(2x + 1)) = e^{-0,5x}(2 - x - 0,5) = e^{-0,5x}(1,5 - x)$.

11. $f(x) = (0,5x - 1)e^{3x+1}$: f est de la forme uv avec $u(x) = 0,5x - 1$ et $v(x) = e^{3x+1}$.
 Alors $u'(x) = 0,5$ et v est, elle, de la forme e^w avec $w(x) = 3x + 1$.
 Alors $w'(x) = 3$. Or $(e^w)' = w' e^w$, donc $v'(x) = 3e^{3x+1}$.
 Par suite, $(uv)' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = 0,5e^{3x+1} + (0,5x - 1)(3e^{3x+1})$.
 Là encore, on factorise par l'exponentielle :

$$f'(x) = e^{3x+1}(0,5 + 1,5x - 3) = e^{3x+1}(1,5x - 2,5).$$

12. $f(x) = \frac{x+1}{e^{2x}}$: f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^{2x}$.

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2e^{2x}$ (forme e^w).

Avec la formule on obtient $f'(x) = \frac{e^{2x} - (x+1)2e^{2x}}{(e^{2x})^2}$.

On peut encore factoriser par l'exponentielle au numérateur et donc ensuite simplifier :

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(1 - 2x - 2)}{(e^{2x})^2} = \frac{-2x - 1}{e^{2x}}.$$

Exercice 32

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$:

On a $f'(x) = 3x^2 - 3$ puis $f''(x) = 6x$. Or $6x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$			
f	concave		convexe

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 0$.

2. $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$:

On a $f'(x) = e^x - x$ puis $f''(x) = e^x - 1$.

Or $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$			
f	concave		convexe

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 0$.

3. $f(x) = (x - 1)^3 + 2$

On a $f = u^3 + 2$ avec $u(x) = x - 1$ et donc $u'(x) = 1$.

Alors $f'(x) = 3u'u^2$, donc $f'(x) = 3(1)(x - 1)^2 = 3(x - 1)^2$.

$f' = 3u^2$, donc $f'' = 3 \times 2u'u = 6u'u$, donc $f''(x) = 6(1)(x - 1) = 6(x - 1)$.

Or $6(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Alors :

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$				
f	concave		convexe	

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 1$.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$f = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$. Donc $u'(x) = 2x$. Or $f' = \frac{-u'}{u^2}$, donc $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.

Par suite, $f' = \frac{v}{w}$ avec $v(x) = -2x$ et $w(x) = (x^2 + 1)^2$.

$v'(x) = -2$.

La fonction w est de la forme u^2 , donc $w' = 2u'u$. Ainsi $w'(x) = 2(2x)(x^2 + 1) = 4x(x^2 + 1)$.

Or $f'' = \frac{v'w - vw'}{w^2}$, donc

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{-2(x^2 + 1)^2 - (-2x)(4x(x^2 + 1))}{((x^2 + 1)^2)^2} \\
 &= \frac{(x^2 + 1)(-2(x^2 + 1) + 8x^2)}{(x^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{(x^2 + 1)(6x^2 - 2)}{(x^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{2(x^2 + 1)(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}
 \end{aligned}$$

comme x^2 est positif, on a $x^2 + 1$ positif, donc $(x^2 + 1)^3$ positif.

2 est également positif.

Il reste à étudier le signe de $3x^2 - 1$, qui est polynomiale du second degré.

On trouve ($\Delta \dots$) deux racines : $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ et $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Or $a = 3 > 0$, donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$		
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$						
f	convexe		concave		convexe	

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et un autre d'abscisse $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. $f(x) = e^{-x^2}$: de la forme e^u avec $u(x) = -x^2$, donc $u'(x) = -2x$. Or $f' = u' e^u$.
Donc $f'(x) = -2x e^{-x^2}$.

La fonction f' est de la forme vw avec $v(x) = -2x$ et $w(x) = f(x)$.

Alors $v'(x) = -2$ et $w'(x) = -2x e^{-x^2}$.

Par suite, $f'' = v'w + vw'$, donc $f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x e^{-x^2}) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2}$.

L'exponentielle est toujours positive.

Il reste à étudier le signe de $-2 + 4x^2$, polynomiale du second degré.

On trouve ($\Delta = \dots$) deux racines : $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Or $a > 0$, donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$					
f	convexe		concave		convexe

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et un autre d'abscisse $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. $f(x) = x e^{-x}$: de la forme uv , dont la dérivée est $u'v + uv'$.

On a $f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x)e^{-x}$.

De même pour dériver f' :

$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$ (attention aux signes).

Or l'exponentielle est toujours positive, il reste à étudier le signe de $(x - 2)$, affine.

Or : $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$			
f	concave		convexe

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 2$.