Modèles discrets
Correction partielle

$\backsim$

Exercice 14

1. Au bout de 1 mois, on a bien toujours $u_1 = 1$ (ce couple est nouveau né)
   Au bout de 2 mois, on a $u_2 = 1$ (le premier couple n'est âgé que d'un mois).
   Au bout de 3 mois, on a $u_3 = 1 + 1 = 2$ (le premier couple a 2 mois, et un nouveau couple naît)
   Au bout de 4 mois, on a $u_4 = 2 + 1 = 3$ (on a toujours le nombre de couples précédents, et on ajoute un nouveau couple pour le couple qui a au moins deux mois)
   Au bout de 5 mois, on a $u_5 = 3 + 2 = 5$ (on a toujours le nombre de couples précédents, et on ajoute un nouveau couple pour chacun des 2 couples d'au moins deux mois précédent)
   Au bout de 6 mois, on a $u_6 = 5 + 3 = 8$ etc.
2. Au mois $(n + 2)$, on ajoute au nombre de couples du mois précédent u_{n+1} un nombre de nouveaux couples égal à celui des couples âgés d'au moins 2 mois, donc le nombre de couple d'il y a deux mois, u_n
   Autrement dit, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
3. Pour répondre au problème posé par Fibonacci, il faut calculer u_{13}. La suite étant définie par récurrence, il faut calculer les termes les uns après les autres.
   Avec la calculatrice, on obtient : $u_{13} = 233$.

Exercice 23

1. Fait à la calculatrice.
2. Les deux suites semblent décroissantes et converger vers 0.
3. Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - 2u_n$.
   (a) On a $w_0 = v_0 - 2u_0 = 20 - 2 \times 10 = 0$.
   Ensuite, $w_1 = v_1 - 2u_1 = \dfrac{10 + 20}{2} - 2 \times \dfrac{5 \times 10 - 20}{4} = \dfrac{30}{2} - \dfrac{60}{4} = 0$.
   etc.
   la suite w semble être constante égale à 0.
   (b) On exprime :
   $$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 2u_{n+1} \\ &= \frac{u_n + v_n}{2} - 2\frac{5u_n - v_n}{4} \\ &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{5u_n - v_n}{2} \\ &= \frac{u_n + v_n - (5u_n - v_n)}{2} \\ &= \frac{-4u_n + 2v_n}{2} \\ &= -2u_n + v_n \\ &= w_n \end{aligned}$$
   On en déduit bien que la suite w est constante.
   Comme $w_0 = 0$, on en déduit bien que quel que soit n, $w_n = 0$.

(c) Comme $w_n = 0$ et $w_n = v_n - 2u_n$, on en déduit que $v_n = 2u_n$.

Par conséquent, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - v_n}{4} = \dfrac{5u_n - 2u_n}{4} = \dfrac{3}{4}u_n$.

On en déduit que la suite u est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = 10$.

Autrement dit, $u_n = u_0 \times q^n = 10 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Par suite, $v_n = 2u_n = 2 \times 10 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 20\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

La suite v est donc elle aussi géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$.

La raison q étant telle que $0 < q < 1$, et les premiers termes u_0 et v_0 étant positifs, on en déduit que les suites u et v sont décroissantes, et qu'elles ont pour limite 0, comme conjecturé.

Exercice 24

Dans chaque cas, on veut $S_9 = v_0 + v_1 + \cdots + v_9$ (somme des 10 premiers termes).

On utilise la formule du cours : $S_9 = v_0 \times \dfrac{1-q^{9+1}}{1-q} = v_0 \times \dfrac{1-q^{10}}{1-q}$

1. Pour $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $q = \dfrac{1}{2}$ et $v_0 = 1$.

   Donc $S_9 = 1 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2^{10}}}{\dfrac{1}{2}} = 2\left(1-\dfrac{1}{2^{10}}\right) = 2\left(1-\dfrac{1}{1024}\right) = 2 \times \dfrac{1023}{1024} = \dfrac{1023}{512}$
2. Pour $v_n = -2 \times 1{,}5^n$, $q = 1{,}5$ et $v_0 = -2$.

   Donc $S_9 = -2 \times \dfrac{1-1{,}5^{10}}{1-1{,}5} = -2 \times \dfrac{1-1{,}5^{10}}{-0{,}5} = 4 \times (1-1{,}5^{10}) \simeq -226{,}66$
3. Si v a pour raison $q = 1{,}1$ et pour premier terme $v_0 = 4$,

   alors $S_9 = 4 \times \dfrac{1-1{,}1^{10}}{1-1{,}1} = 4 \times \dfrac{1-1{,}1^{10}}{-0{,}1} = -40 \times (1-1{,}1^{10}) \simeq 63{,}75$

Exercice 25

1. On a $S_n = 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 + \cdots + 0{,}2^n$.

   En posant $v_n = 0{,}2^n$, on observe que $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

   Or v est géométrique de raison 0,2 et de premier terme $v_0 = 1$, donc :

   $S_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2} = \dfrac{1-0{,}2^{n+1}}{0{,}8}$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}2^{n+1} = 0$ car $0 < 0{,}2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1-0}{0{,}8} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$.

   (On remarque que la somme des deux premiers termes vaut déjà 1,2, celle des trois premiers termes vaut 1,24, donc ça s'approche très vite de la limite).
2. On a $S_n = -5 - 5 \times 3 - 5 \times 3^2 - \cdots - 5 \times 3^n$.

   En posant $v_n = -5 \times 3^n$, on observe que $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

   Or v est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -5$, donc :

   $S_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = -5 \times \dfrac{1-3^{n+1}}{1-3} = -5 \times \dfrac{1-3^{n+1}}{-2} = \dfrac{5}{2} \times (1-3^{n+1})$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^{n+1} = +\infty$ car $3 > 1$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

3. On a $S_n = 2\times 0{,}92^2 + 2\times 0{,}92^3 + \cdots + 2\times 0{,}92^n = 2\times 0{,}92^2 \times (1 + 0{,}92 + \cdots + 0{,}92^{n-2})$.
   En posant $v_n = 0{,}92^n$, on observe que $S_n = 2\times 0{,}92^2(v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-2})$.
   Or v est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = 1$, donc :
   $S_n = 2\times 0{,}92^2\left(v_0 \times \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}\right) = 2\times 0{,}92^2 \times 1 \times \dfrac{1-0{,}92^{n-1}}{1-0{,}92} = 1{,}6928 \times \dfrac{1-0{,}92^{n-1}}{0{,}08}$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}08^{n-1} = 0$ car $0 < 0{,}92 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1{,}6928 \times \dfrac{1-0}{0{,}08} = 21{,}16$.

   Remarque Il existe une autre formule de somme dans le cas où on commence par un autre terme que v_0 dans la somme :

$$\begin{aligned} v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n &= v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \\ &= \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes dans la somme}}}{1-q} \end{aligned}$$

   Avec cette formule :
   On a $S_n = 2\times 0{,}92^2 + 2\times 0{,}92^3 + \cdots + 2\times 0{,}92^n$.
   En posant $v_n = 2\times 0{,}92^n$, on observe que $S_n = v_2 + v_3 + \cdots + v_n$.
   Or v est géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = 2$, donc :
   $S_n = v_2 \times \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} = 2\times 0{,}92^2 \times \dfrac{1-0{,}92^{n-1}}{1-0{,}92} = 1{,}6928\dfrac{1-0{,}92^{n-1}}{0{,}08}$

Exercice 27

1. Augmenter de 5% revient à multiplier par 1,05, d'où le « $1{,}05u_n$ ». Le nombre de calculatrice vendues diminue en plus de 10 000, doit 10 milliers, d'où : $u_{n+1} = 1{,}05u_n - 10$.
2. (a) On cherche α tel que $\alpha = 1{,}05\alpha - 10$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha = 1{,}05\alpha - 10 &\Leftrightarrow 10 = 0{,}05\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{10}{0{,}05} = 200 \end{aligned}$$

   (b) Soit donc $v_n = u_n - \alpha = u_n - 200$.
   On exprime :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 200}{u_n - 200} \\ &= \frac{1{,}05u_n - 10 - 200}{u_n - 200} \\ &= \frac{1{,}05u_n - 210}{u_n - 200} \\ &= \frac{1{,}05\left(u_n - \frac{210}{1{,}05}\right)}{u_n - 200} \\ &= \frac{1{,}05(u_n - 200)}{u_n - 200} \\ &= 1{,}05 \text{ constante} \end{aligned}$$

   Donc v est géométrique de raison $q = 1{,}05$ et $v_0 = u_0 - 200 = 600 - 200 = 400$.
3. On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = 400 \times 1{,}05^n$
   Or $v_n = u_n - 200$ donc $u_n = v_n + 200 = 400 \times 1{,}05^n + 200$.

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}05^n = +\infty$ car $1{,}05 > 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Avec cette modélisation, le nombre de calculatrices vendues semble tendre vers l'infini avec les années (ce qui bien sûr n'est pas réaliste).

Exercice 28

1. Augmenter de 4% revient à multiplier par 1,04, d'où le « $1{,}04u_n$ ».
D'autre part, 156 étudiants démissionnent chaque année, donc $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.
On a $u_0 = 27\ 500$.
2. (a) On cherche α tel que $\alpha = 1{,}04\alpha - 156$. On résout cette équation :

$$\begin{aligned} \alpha = 1{,}04\alpha - 156 &\Leftrightarrow 156 = 0{,}04\alpha \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{156}{0{,}04} = 3\ 900 \end{aligned}$$

On a donc $v_n = u_n - 3\ 900$.
Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 3\ 900}{u_n - 3\ 900} \\ &= \frac{1{,}04u_n - 156 - 3\ 900}{u_n - 3\ 900} \\ &= \frac{1{,}04u_n - 4\ 056}{u_n - 3900} \\ &= \frac{1{,}04\left(u_n - \frac{4\ 056}{1{,}04}\right)}{u_n - 3\ 900} \\ &= \frac{1{,}04(u_n - 3\ 900)}{u_n - 3\ 900} \\ &= 1{,}04 \text{ constante} \end{aligned}$$

Donc v est géométrique de raison $q = 1{,}04$ et $v_0 = u_0 - 3\ 900 = 27\ 500 - 3\ 900 = 23\ 600$.
(b) On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = 23\ 600 \times 1{,}04^n$
Or $v_n = u_n - 3\ 900$ donc $u_n = v_n + 3\ 900 = 23\ 600 \times 1{,}04^n + 3\ 900$.
3. (a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}04^n = +\infty$ car $1{,}04 > 1$.
Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
La limite étant infinie, la capacité maximale d'accueil de 33 000 étudiants sera dépassée au bout d'un certain nombre d'années.
(b) Pour déterminer l'année à partir de laquelle la capacité d'accueil de 33 000 étudiants sera dépassée, on peut utiliser la calculatrice.
On trouve que pour $n \geqslant 6$, la capacité est dépassée.

Exercice 29

1. À l'aide de la calculatrice, on obtient $u_2 = 7{,}75$, $u_3 = 7{,}9375$, etc.
La suite semble croissante.
D'autre part, elle semble converger vers 8, autrement dit être telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$.

2. Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

   (a) On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{4}u_{n+1} - (u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n) \\
&= u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\
&= u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\
&= \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

   On en déduit que $v_{n+1} = v_n$, autrement dit que la suite est constante.

   (b) On calcule $v_0 = u_1 - \dfrac{1}{4}u_0 = 7 - \dfrac{1}{4} \times 4 = 7 - 1 = 6$.
   Donc quel que soit n, $v_n = 6$.
   Or, $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$, donc $6 = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.
   On en déduit que $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 6$: la suite u est arithmético-géométrique.

   (c) On résout :

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{4}x + 6 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 6 \\
&\Leftrightarrow x = 6 \times \frac{4}{3} \\
&\Leftrightarrow x = 8
\end{aligned}$$

   On pose $w_n = u_n - 8$.
   On démontre que w est géométrique :

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{u_{n+1} - 8}{u_n - 8} \\
&= \frac{\frac{1}{4}u_n + 6 - 8}{u_n - 8} \\
&= \frac{\frac{1}{4}u_n - 2}{u_n - 8} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(u_n - 2 \times 4)}{u_n - 8} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(u_n - 8)}{u_n - 8} \\
&= \frac{1}{4} \text{ constante}
\end{aligned}$$

   w est bien géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 8 = 4 - 8 = -4$.
   Donc $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   Enfin, on rappelle que $w_n = u_n - 8$, donc $u_n = w_n + 8 = -4 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 8$.

(d) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4\times 0 + 8 = 8$ (ce qui était notre conjecture).

Exercice 30

1. À l'aide de la calculatrice, on peut voir que la suite est non monotone, mais qu'elle semble converger vers 1,4.
2. On résout (on cherche la valeur d'une suite constante qui vérifie la relation de la suite u :

$$\begin{aligned}\alpha = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{7}{3} &\Leftrightarrow \frac{5}{3}\alpha = \frac{7}{3}\\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{5} = 1{,}4\end{aligned}$$

On pose $v_n = u_n - \frac{7}{5}$

On démontre que v est géométrique :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}-\frac{7}{5}}{u_n-\frac{7}{5}}\\ &= \frac{-\frac{2}{3}u_n+\frac{7}{3}-\frac{7}{5}}{u_n-\frac{7}{5}}\\ &= \frac{-\frac{2}{3}u_n+\frac{14}{15}}{u_n-\frac{7}{5}}\\ &= \frac{-\frac{2}{3}(u_n-\frac{14}{15}\times\frac{3}{2})}{u_n-\frac{7}{5}}\\ &= \frac{-\frac{2}{3}(u_n-\frac{7}{5})}{u_n-\frac{7}{5}}\\ &= -\frac{2}{3}\text{ constante}\end{aligned}$$

Donc v est bien géométrique, de raison $q = -\frac{2}{3}$ et de premier terme :

$v_0 = u_0 - \frac{7}{5} = 5 - \frac{7}{5} = \frac{18}{5}$.

Alors $v_n = v_0 \times q^n = \frac{18}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Par suite, comme $v_n = u_n - \frac{7}{5}$, on a $u_n = v_n + \frac{7}{5} = \frac{18}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{7}{5}$.

3. On a $S_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$. Or $u_n = v_n + \frac{7}{5}$, donc :

$S_n = v_0 + \frac{7}{5} + v_1 + \frac{7}{5} + \cdots + v_n + \frac{7}{5} = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (n+1)\times\frac{7}{5}$.

Or, v étant géométrique, on a, d'après le cours :

$$\begin{aligned}
v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} &= \frac{18}{5} \times \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} \\
&= \frac{18}{5} \times \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{5}{3}} = \frac{18}{5} \times \frac{3}{5} \times \left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{54}{25} \times \left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $S_n = \left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \times \frac{54}{25} + \frac{7}{5}(n+1)$.

4. Le nombre $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ tend assez rapidement vers 0, puisque $0 < \frac{2}{3} < 1$.

   Ainsi, rapidement, S_n est proche de $(1-0) \times \frac{54}{25} + \frac{7}{5}(n+1)$.

   Autrement dit, en simplifiant et en développant, $S_n \simeq \frac{54}{25} + \frac{7}{5} + \frac{7}{5}n$.

   Comme n devient très grand, les constantes $\frac{54}{25}$ et $\frac{7}{5}$ deviennent négligeables devant $\frac{7}{5}n$ (qui tend vers $+\infty$ puisque $\frac{7}{5} > 0$).

   Ainsi, pour n assez grand, S_n vaut environ $\frac{7}{5}n$, c'est à dire $1{,}4n$.

   Une autre manière de penser est que, si on admet que u_n tend vers $\frac{7}{5}$ (en s'en approchant très vite) comme on l'a conjecturé, la somme des termes $(n+1)$ premiers termes n'est pas très différente de $(n+1) \times \frac{7}{5}$, qui elle-même, lorsque n est très grand, n'est pas très différente de $\frac{7}{5}n$.