

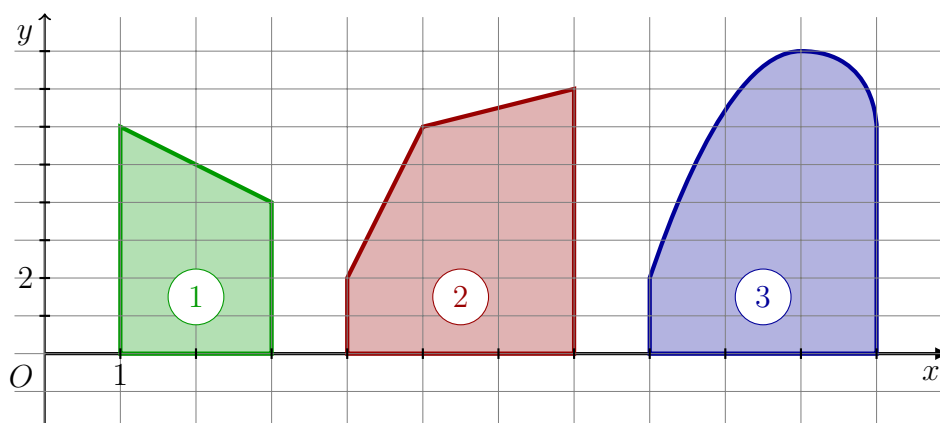
Calculs d'aires



Exercice 1 (Aires par lecture graphique)

On considère les trois domaines tracés ci-dessous.

On suppose que l'unité correspond à 2 cm sur l'axe des abscisses et à 1 cm sur l'axe des ordonnées.



Rappel : l'unité d'aire est l'aire du rectangle de côtés 1 unité en abscisse et 1 unité en ordonnée. Ici, c'est l'aire d'un « carreau » de la figure. On appellera donc ici « carreau » une unité d'aire.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiqué si elle est vraie ou non et justifier la réponse.

1. L'aire du domaine ① vaut 10 cm^2 .
2. L'aire du domaine ① vaut 10 carreaux.
3. L'aire du domaine ② vaut plus que 28 cm^2 .
4. L'aire du domaine ③ est supérieure à celle du domaine ②.
5. L'aire du domaine ③ est comprise entre 36 cm^2 et 48 cm^2 .

Exercice 2 (Calcul simple par graphique)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 3$.

1. Tracer la représentation de f dans un repère sur l'intervalle $[-1; 4]$ au moins.
2. Décrire le domaine dont l'intégrale $I = \int_{-1}^3 f(x)dx$ est l'aire.
Autrement dit, indiquer par quoi le domaine est délimité.
3. Obtenir la valeur de I à l'aide de calculs d'aires simples.

Exercice 3 (Calculs d'intégrales)

Dans chaque cas, calculer l'intégrale de f demandée après avoir vérifié que la fonction F donnée est une primitive de f .

1. $\int_{-2}^5 x^2 - 4x + 5 dx$ et $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$
2. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ et $F(x) = 2\sqrt{x}$
3. $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$ et $F(x) = (x - 1)e^x$
4. $\int_1^e \ln(x) dx$ et $F(x) = x \ln(x) - x$

Exercice 4 (Calculs d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes. Les derniers (*) sont hors tables du cours.

1. $\int_3^7 x^2 + 2x - 9 dx$
2. $\int_1^e x + \frac{1}{x} dx$
3. $\int_{-2}^2 x^3 + x dx$
4. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2} dt$
5. $\int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx$
6. $\int_{-1}^1 e^{2t-1} dt$
7. $\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$
8. (*) $\int_0^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+3}} dt$
9. (*) $\int_0^4 \frac{2x}{(x^2+3)^2} dx$

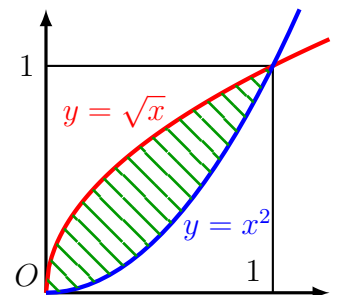
Exercice 5 (Calculs d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes. Les derniers (*) sont hors tables du cours.

1. $\int_{-2}^4 (3x-1) e^{1,5x^2-x+3} dx$
2. $\int_1^2 (-3t^2+4t)(-t^3+2t^2+1) dt$
3. $\int_{-4}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx$
4. $\int_{-5}^{-4} \frac{2}{(2t+7)^2} dt$
5. (*) $\int_1^3 \frac{7-6x}{\sqrt{9+7x-3x^2}} dx$
6. (*) $\int_{e^{-1}}^e \frac{(\ln t)^2}{t} dt$

Exercice 6 (Calculs d'intégrales)

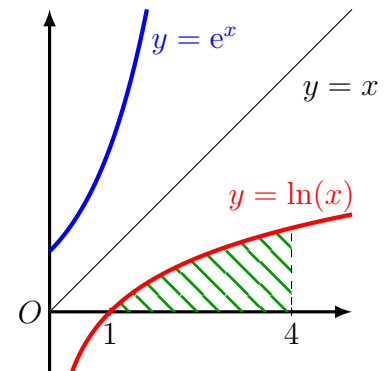
1. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
2. À l'aide de considérations géométriques, déterminer la valeur de $\int_0^1 \sqrt{x} dx$.
3. En déduire l'aire du domaine hachuré ci-contre.



Exercice 7 (Calculs d'intégrales – facultatif)

1. Écrire l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $\ln$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=4$ sous forme d'intégrale.
2. Pourquoi le calcul de l'intégrale pose-t-il problème avec les seules connaissances du cours ?
3. À l'aide du graphique, trouver une méthode pour calculer l'aire du domaine.

Indication : la résolution de l'équation $e^x = 4$ pourrait être nécessaire.



Exercice 8 (Linéarité)

On donne les valeurs des intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$ et $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Exprimer alors $K = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} + 6\sqrt{1-x} dx$ en fonction de I et J et en calculer la valeur.

Exercice 9 (Linéarité)

1. Calculer les intégrales $I = \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx$ et $J = \int_2^4 \frac{1}{x+1} dx$.
2. Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$.

(a) Démontrer que $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

(b) Dédurre des questions précédentes la valeur de l'intégrale $K = \int_2^4 f(t) dt$.

Exercice 10 (Linéarité)

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

1. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$.

2. Soit $J = \int_0^1 g(x)dx$.

(a) Calculer $I + J$. Indication : utiliser la linéarité et simplifier.

(b) En déduire la valeur de J .

Exercice 11 (Valeur moyenne)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$. Soit $I = \int_{-3}^3 f(t)dt$.

1. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de I .

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

3. Calculer alors la valeur exacte de I .

4. En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3 : 3]$.

Exercice 12 (Encadrement)

Les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ représentent les fonctions f , g et h définies sur $]0; +\infty[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

On a $f(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{3}{8}(x-1)(x-5)$.

On ne donne pas l'expression de $g(x)$ en fonction de x .

1. Calculer l'aire du domaine défini par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.

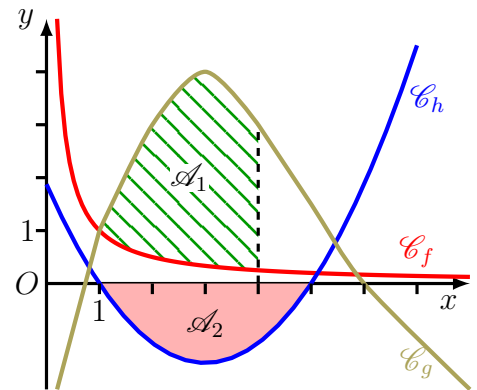
2. Exprimer les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ à l'aide d'intégrales.

3. Démontrer que $\mathcal{A}_2 = 4 \text{ cm}^2$.

4. Sachant que, pour tout $x \in [1; 3]$, $1 \leq g(x) \leq 4$, et que, sur $[3; 4]$, $3 \leq g(x) \leq 4$, démontrer que :

$$5 \leq \int_1^4 g(x)dx \leq 12$$

5. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}_1$.



Exercice 13 (Relation de Chasles – facultatif)

Soient $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{x^2}{8}$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = 6 - x$.

Les informations sont données sur le graphique.

L'unité est le centimètre.

Démontrer que l'aire du domaine hachuré est 6 cm^2 .

Aide : Penser à utiliser la relation de Chasles.

