# Calculs d'aires
# Correction partielle

∽

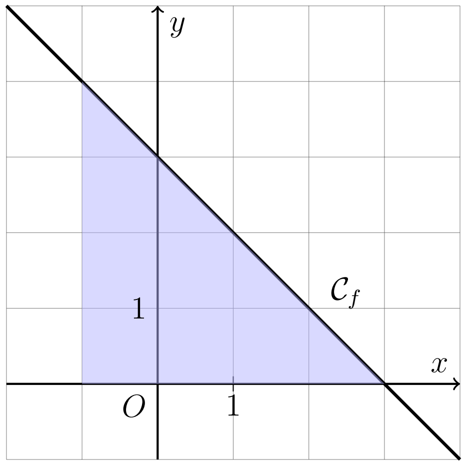
**Exercice 1**

On rappelle l'aire d'un trapèze ayant pour base $b$ et les hauteurs $h_1$ et $h_2$ : $\dfrac{b(h_1+h_2)}{2}$
(on peut voir cela comme la moitié de l'aire d'un rectangle ayant une hauteur de $(h_1+h_2)$ et une largeur de $b$)

1. **Faux :**
   On a l'aire d'un trapèze : $\dfrac{2(4+6)}{2} = 10$ u.a.
   Or ici l'unité d'aire est de $1 \times 2 = 2$ cm$^2$ d'après les unités.
   L'aire est donc de $10 \times 2 = 20$ cm$^2$.
   L'affirmation est donc fausse.
2. **Vrai :**
   Les carreaux étant des carreaux unitaires (d'aire 1 u.a.), nous avons vu à la question précédente qu'effectivement cette aire est de 10 carreaux.
3. **Vrai :**
   On peut calculer précisément l'aire du domaine ② comme l'aire de deux trapèzes :
   $\dfrac{1(2+6)}{2} + \dfrac{2(6+7)}{2} = 4 + 13 = 17$ u.a.
   On multiplie par l'aire d'une unité d'aire pour l'avoir en cm$^2$.
   On obtient alors que l'aire du domaine ② vaut 34 cm$^2$, qui est bien supérieure à 28 cm$^2$.
4. **Vrai :**
   Le domaine ② est presque contenu tout entier dans le domaine ③. Ce qui « dépasse » (en haut à droite) est largement compensé (d'au moins un carreau supplémentaire) par les parties plus élevées.
5. **Vrai :**
   En considérant le rectangle de côtés 3 et 8 qui contient le domaine ③, on peut dire que ce rectangle a une aire supérieure à celle du domaine ③. Or cette aire vaut $3 \times 8 \times 2 = 48$ cm$^2$.
   Nous avons indiqué précédemment que l'aire du domaine ②, inférieure à celle du domaine ③, était de 34 cm$^2$. On peut estimer que l'on peut encore ajouter 1 carreau, donc 2 cm$^2$ tout en restant inférieur à l'aire du domaine ③.

**Exercice 2**

1. On a la figure suivante, le domaine étant celui colorié en bleu :




2. Le domaine a pour aire exactement l'intégrale demandée : $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.
   Il s'agit de l'aire d'un triangle rectangle $\dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$ u.a.

**Exercice 3**

1. On a $F'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 5 \times 1 = x^2 - 8x + 5 = f(x)$.
   Ainsi, $\int_{-2}^{5} f(x)dx = F(5) - F(-2) = \dfrac{50}{3} - \left(-\dfrac{62}{3}\right) = \dfrac{112}{3}$.
2. 
3. On a $F = uv$. Alors $F' = u'v + uv'$ : $F'(x) = 1\,\mathrm{e}^x + (x-1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x = f(x)$.
   Ainsi, $\int_{0}^{\ln 2} f(x)dx = F(\ln(2)) - F(0) = 2(\ln(2) - 1) - (-1) = 2\ln(2) - 1$
4. On a $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln x = f(x)$.
   Ainsi, $\int_{1}^{\mathrm{e}} f(x)dx = F(\mathrm{e}) - F(1) = \mathrm{e} \times 1 - \mathrm{e} - (1 \times 0 - 1) = 0 - (-1) = 1$.

**Exercice 4**

Nous notons $I$ ou $J$ l'intégrale à calculer.

1. Soit $f(x) = x^2 + 2x - 9$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 9x$.
   Par suite, $I = F(7) - F(3) = \dfrac{301}{3} - (-9) = \dfrac{328}{3}$.
2. Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln x$.
   Par suite, $J = F(\mathrm{e}) - F(1) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{2}$.
3. Soit $f(x) = x^3 + x$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}x^2$.
   Par suite, $I = F(2) - F(-2) = 6 - 6 = 0$.
4. Soit $f(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} - \dfrac{1}{t^2}$. Alors $F(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1}{t}$.
   Par suite, $J = F(4) - F(1) = \left(2 + \dfrac{1}{4}\right) - (1 + 1) = \dfrac{1}{4}$.
5. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Alors $F(x) = \ln(x+2)$.
   Par suite, $I = F(0) - F(-1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.
6. 

7. Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$. Alors $F(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.
   ($u'u$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$)
   Par suite, $I = F(3) - F(1) = \dfrac{1}{2}(\ln 3)^2$.
8. Soit $f(t) = \dfrac{2t}{\sqrt{t^2+3}}$. Alors $F(t) = 2\sqrt{t^2+3}$.
   ($\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$)
   Par suite, $J = F(4) - F(0) = 2\sqrt{19} - 2\sqrt{3}$.
9. Soit $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$. Alors $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+3}$.
   ($\dfrac{u'}{u^2}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{u}$)
   Par suite, $I = F(4) - F(0) = -\dfrac{1}{19} - \left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{16}{57}$.

**Exercice 5**

1.
2.
3.
4.
5. $I = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{13}$ ($F(x) = 2\sqrt{9+7x-3x^2}$)
6. $J = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}(-1) = \dfrac{2}{3}$ ($F(t) = \dfrac{1}{3}(\ln t)^3$)

**Exercice 6**

**Exercice 7**

1. L'intégrale est $I = \int_1^4 \ln(x)dx$.
2. En principe on ne connaît pas la primitive de $f : x \mapsto \ln x$ (elle n'est pas donnée en cours).
   Mais en fait nous avons déjà pu la voir dans des exercices de dérivation : $F(x) = x\ln x - x$.
   Alors $I = F(4) - F(1) = 4\ln(4) - 4 - (-1) = 4\ln(4) - 3$.
3. Ici on utilise le fait que la courbe de la fonction exponentielle est le symétrique de celle de la fonction logarithme par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   La surface hachurée est la même que celle délimitée par la courbe de la fonction exponentielle, l'axe des ordonnées et les droites d'équation $y = 1$ et $y = 4$.
   On cherche $x$ tel que $e^x = 4$ : $x = \ln 4$.
   Alors on peut voir l'aire de la surface comme celle d'un rectangle de hauteur 4 et de largeur $\ln 4$ à laquelle on soustrait l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle entre 0 et $\ln 4$ :
   $4\ln 4 - \int_0^{\ln 4} \mathrm{e}^x\, dx$
   Or si $g(x) = \mathrm{e}^x$, alors $G(x) = \mathrm{e}^x$, et $\int_0^{\ln 4} \mathrm{e}^x\, dx = G(\ln 4) - G(0) = \mathrm{e}^{\ln 4} - \mathrm{e}^0 = 4 - 1 = 3$.
   Finalement, l'aire vaut bien $4\ln 4 - 3$.

**Exercice 8**

On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} + 6\sqrt{1-x}dx \\
&= \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 6\sqrt{1-x}dx \\
&= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx + 6\int_0^1 \sqrt{1-x}dx \\
&= 4J + 6I \\
&= \pi + 4
\end{aligned}$$

**Exercice 9**

1. sur $[2;4]$,
   $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ a pour primitive $F : x \mapsto \ln(x-1)$
   et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ a pour primitive $G : x \mapsto \ln(x+1)$.
   Alors : $I = F(4) - F(2) = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$ et $J = G(4) - G(2) = \ln 5 - \ln 3$.
2. (a) On a :
   $$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1-x+1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1} = f(x)$$
   (b) Par suite, on peut obtenir $K$ grâce à la linéarité de l'intégrale. En effet :
   $$\begin{aligned}
   K &= \int_2^4 \frac{2}{x^2-1}dx \\
   &= \int_2^4 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}dx \\
   &= \int_2^4 \frac{1}{x-1}dx - \int_2^4 \frac{1}{x+1}dx
   \end{aligned}$$
   Autrement dit :
   $$\begin{aligned}
   K &= I - J \\
   &= \ln 3 - (\ln 5 - \ln 3) \\
   &= 2\ln 3 - \ln 5 \\
   &= \ln\left(\frac{3^2}{5}\right) \\
   &= \ln\left(\frac{9}{5}\right)
   \end{aligned}$$

**Exercice 10**

1. On a $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{1+x^2}$.
   Donc $f = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + x^2$.
   $f$ a pour primitive $F = \dfrac{1}{2}\ln u$.
   Donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
   Par suite, $I = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \dfrac{1}{2}\ln(2) - \dfrac{1}{2}\ln(1) = \dfrac{1}{2}\ln 2 \quad \left(= \ln(\sqrt{2})\right)$.

2. (a) Pour calculer $I+J$, on utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)+g(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 xdx \end{aligned}$$

Soit $h(x)=x$. Alors $H(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Ainsi, $I+J=H(1)-H(0)=\frac{1}{2}$.

(b) On en déduit que $J=\frac{1}{2}-I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}(1-\ln 2)=\frac{1-\ln 2}{2}$.

**Exercice 11**

**Exercice 12**

1. On nous demande $I=\int_1^4 f(t)dt$ avec $f(t)=\frac{1}{t}$.
   Or $F(t)=\ln(t)$, donc $I=F(4)-F(1)=\ln 4-\ln 1=\ln 4$.
2. On a $\mathscr{A}_1=\int_1^4 g(t)dt-\int_1^4 f(t)dt$.
3. On a $\mathscr{A}_2=-\int_1^5 h(t)dt$ (la fonction étant négative, l'aire est l'opposé de l'intégrale).
   Or $h(t)=\frac{3}{8}(x-1)(x-5)=\frac{3}{8}(x^2-6x+5)$.
   Par suite, $H(t)=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right)$. Alors :
   $\mathscr{A}_2=-(H(5)-H(1))=H(1)-H(5)=\frac{3}{8}\left(\left(\frac{1}{3}-3+5\right)-\left(\frac{125}{3}-75+25\right)\right)=4.$
4. D'après la relation de Chasles, $\int_1^4 g(x)dx=\int_1^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$.
   Or, pour $x\in[1;3]$, $1\leqslant g(x)\leqslant 4$, donc d'après le cours (encadrement d'une intégrale), $1(3-1)\leqslant\int_1^3 g(x)dx\leqslant 4(3-1)$, soit $2\leqslant\int_1^3 g(x)dx\leqslant 8$.
   De même, pour $x\in[3;4]$, $3\leqslant g(x)\leqslant 4$, donc $3(4-3)\leqslant\int_3^4 g(x)dx\leqslant 4(4-3)$, soit $3\leqslant\int_3^4 g(x)dx\leqslant 4$.
   En ajoutant les encadrements on obtient :
   $2+3\leqslant\int_1^4 g(x)dx\leqslant 8+4$ soit $5\leqslant\int_1^4 g(x)dx\leqslant 12$.
5. Pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}_1$, il suffit de soustraire $I$ : $5-\ln 4\leqslant\mathscr{A}_1\leqslant 12-\ln 4$.

**Exercice 13**

Notons $\mathscr{A}$ l'aire de la surface hachurée.
Cette surface hachurée se découpe en deux parties :

- La première, d'aire $\mathscr{A}_1$, délimitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $x=2$.
- La seconde, d'aire $\mathscr{A}_2$, délimitée par $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $x=2$.

On a $\mathscr{A}_1 = \int_0^2 (f(t) - g(t))dt$ et $\mathscr{A}_2 = \int_2^4 ((6-t) - g(t))dt$.
On aura finalement $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.
On a $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ et $G(x) = \dfrac{x^3}{24}$.
De plus, soit $h(x) = 6 - x$, alors $H(x) = 6x - \dfrac{1}{2}x^2$.
Par suite,
$\mathscr{A}_1 = (F(2) - G(2)) - (F(0) - G(0)) = F(2) - G(2) = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.
$\mathscr{A}_2 = (H(4) - G(4)) - (H(2) - G(2)) = \left(16 - \dfrac{8}{3}\right) - \left(10 - \dfrac{1}{3}\right) = 6 - \dfrac{7}{3}$.
Finalement, $\mathscr{A} = \dfrac{7}{3} + 6 - \dfrac{7}{3} = 6$ u.a.
Remarque : on aurait pu aussi écrire que $\mathscr{A} = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^4 h(t)dt - \int_0^4 g(t)dt$.