

Chapitre :

Fonction logarithme



⊗ **Activité** : Consolider les bases page 100

⊗ **Activité** : Des produits à l'aide de sommes

I. Réciproque de l'exponentielle

Propriété (et définition de fonction réciproque) Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On suppose que f est continue et strictement monotone sur I . On note $J = f(I)$, c'est à dire que J est l'image de I , autrement dit l'ensemble des $f(x)$ avec $x \in I$. J est alors un intervalle, et pour tout $a \in J$, il existe un unique réel b tel que $f(b) = a$.

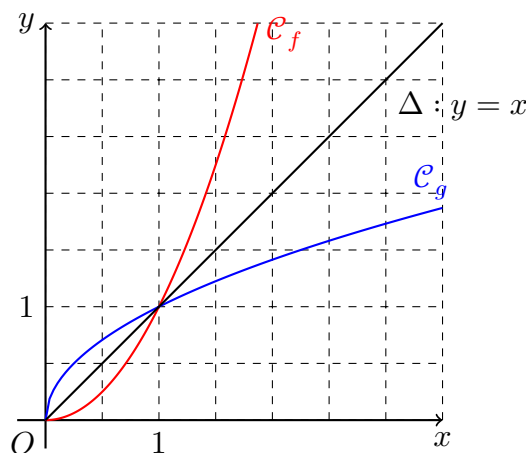
On peut alors définir la fonction g sur J qui, à tout réel a de J associe le réel b , c'est à dire telle que $g(a) = b$.

On dit que g est la fonction réciproque de f .

On a alors la propriété suivante : Quels que soit $a \in J$ et $b \in I$, $a = f(b) \Leftrightarrow b = g(a)$.

Graphiquement, Les courbes représentatives de f et g sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Un exemple simple de cela est la fonction carré, $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0; +\infty[$, et sa réciproque, la fonction racine carrée, $g : x \mapsto \sqrt{x}$:



Définition La fonction exponentielle $\exp$ est définie sur $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ et $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$. Elle est continue et strictement croissante. Elle admet donc une fonction réciproque d'après la propriété précédente. On appelle cette fonction réciproque la fonction **logarithme népérien**.

On note cette fonction $\ln$.

On a alors la propriété suivante :

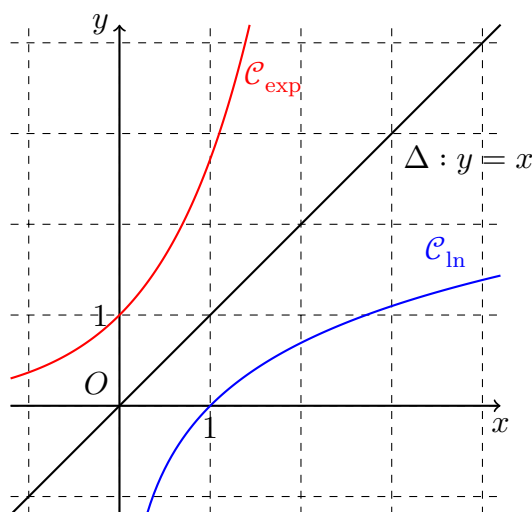
Quel que soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a = e^b \Leftrightarrow \ln(a) = b$.

Quelques valeurs à connaître : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

On note parfois abusivement $\ln x$ (sans parenthèse) au lieu de $\ln(x)$.

 Ne pas confondre $\ln x + 1$ et $\ln(x + 1)$. La première expression est en fait $\ln(x) + 1$.

Bien sûr, les courbes représentatives de $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$:



Propriétés

- La fonction logarithme (népérien) est continue sur $]0; +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.
- Quel que soit $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

► Exercices : Limites

On peut alors résoudre quelques (in)équations supplémentaires :

Exemple

$$\begin{aligned} e^x - 3 &= 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \ln 3 \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \ln x - 8 &< 0 \Leftrightarrow \ln x < 8 \\ &\Leftrightarrow x < e^8 \end{aligned}$$

► Exercices : Équations de base

► Exercices : Inéquations de base

II. Propriétés de la fonction logarithme

Propriété | La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse.

Autrement dit, la fonction logarithme est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration :

Si on admet que la fonction $\ln$ est dérivable, on utilise la fonction $x \mapsto e^{\ln x}$ définie sur $]0; +\infty[$. Elle est de la forme e^u avec $u(x) = \ln(x)$. Sa dérivée est donc $u' e^u$, dont l'expression est $\ln'(x) e^{\ln x}$. Or $e^{\ln x} = x$, donc la dérivée de la fonction est $x \mapsto 1$ et : $\ln'(x) \times x = 1$. Comme $x \neq 0$, on a bien $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Corollaire | La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus :

- $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0$;
- $x > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > 0$;
- Soit a et b strictement positifs. Alors : $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$, mais aussi : $a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$
- La fonction $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$ (sa dérivée seconde est négative).

Propriété | Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I . Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et a pour dérivée

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On en déduit que $\ln u$ est une primitive de $\frac{u'}{u}$.

- Exercices : Dérivation
- Exercices : Primitives
- Exercices : Étude de fonction
- Exercices : Modélisation (approfondissement facultatif)

III. Relation fonctionnelle

Théorème | Pour tous a et b réels strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Cette égalité est appelée **relation fonctionnelle** du logarithme. On dit que le logarithme transforme le produit en somme. (Rappel : l'exponentielle transforme la somme en produit)

Démonstration : Équivalences en passant par l'exponentielle.

Propriété | Pour tout $b > 0$,

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

Démonstration : Similaire à la précédente.

Les deux précédentes propriétés permettent d'établir les résultats suivants :

Corollaire |

- Soit a et b strictements positifs. Alors :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

- Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\ln(a^n) = n \ln(a)$$

le nombre n peut également être un entier relatif pour la dernière égalité.

- Pour tout $a > 0$,

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

La démonstration de la dernière fait l'objet en particulier d'un exercice.

Ces relations permettent bien entendu de réécrire des expressions utilisant le logarithme.

► **Exercices** : Relation fonctionnelle

► **Exercices** : Équations avec relation fonctionnelle

Avec cette propriété, on peut résoudre des (in)équations dont l'inconnue est en exposant :

Exemple

$$\begin{aligned} 0,7^n < 10^{-2} &\Leftrightarrow \ln(0,7^n) < \ln(10^{-2}) && (\ln \text{ est croissante}) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,7) < \ln(10^{-2}) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln(0,7)} && (\ln(0,7) < 0 \text{ car } 0,7 < 1) \\ &\Leftrightarrow n > 12,9 \end{aligned}$$

Autrement dit, dès que $n \geq 13$, on a $0,7^n < 10^{-2}$.

► **Exercices** : Rangs de suites

Approfondissement : choix d'un exercice dans les pages 120 à 123 (mathématiques en situation)