

Devoir surveillé n°6 – NSI
Correction

Exercice 1

- La boucle sur i s'exécute n fois et contient une somme et une boucle sur j qui s'exécute 4 fois (5-1) et contient elle-même une somme.
On a alors $n \times (1 + 4 \times 1) = 5n$ sommes effectuées.
- La complexité est donc linéaire en fonction de n .

Exercice 2

- x démarre à 0.
On va ajouter 1 à x jusqu'à obtenir n , donc la boucle est répétée environ n fois : coût linéaire.
- x démarre à 1.
On va multiplier x par 2 jusqu'à atteindre n . On répète donc la boucle autant de fois que l'on peut diviser n par 2. C'est un coût identique à celui de la recherche dichotomique, donc un coût logarithmique ($\log_2(n)$).
- x démarre à 0.
On va ajouter $\frac{1}{n}$ à x jusqu'à obtenir n . Pour cela, il va falloir le faire n^2 fois $\left(n^2 \times \frac{1}{n} = n\right)$.
Le coût est donc quadratique.

Exercice 3

- Au départ,
 $x=2$
 $k=4$
 $z=1$
Ensuite, on peut compléter le tableau :

Étape	k en début	k!=0	k%2 == 1	z	x	k en fin
1	4	vrai	faux	1	$2 \times 2 = 4$	2
2	2	vrai	faux	1	$4 \times 4 = 16$	1
3	1	vrai	vrai	$1 \times 16 = 16$	$16 \times 16 = 256$	0
4	0	faux				

- À la fin la valeur retournée est celle de z , à savoir 16.
- la variable k est un variant de la boucle. À chaque itération de la boucle, k est divisée par 2 en restant entier, en commençant par n .
Donc à partir d'un moment k vaut forcément 0 et la condition de la boucle n'est plus satisfaite.
 - Initialisation :** Avant la boucle, $x=b$, $k=n$ et $z=1$.

Alors $z \times x^k = 1 \times b^n = b^n$ et $k \geq 0$ (n étant entier naturel).

Hérédité : On suppose qu'avant une itération de la boucle, « $z \times x^k = b^n$ et $k \geq 0$ » est vraie

On note z' , x' et k' les valeurs des trois variables à la fin de l'itération de la boucle.

On doit montrer que « $z' \times x'^{k'} = b^n$ et $k' \geq 0$ ».

Deux cas se présentent :

- Soit k est pair, dans ce cas, $k = 2k'$, autrement dit $k' = \frac{k}{2}$, $z' = z$, et $x' = x \times x = x^2$.

$$\text{Alors } z' \times x'^{k'} = z \times (x^2)^{\frac{k}{2}} = z \times x^k = b^n$$

- Soit k est impair, dans ce cas $k = 2k' + 1$, autrement dit $k' = \frac{k-1}{2}$, $z' = z \times x$ et $x' = x \times x = x^2$.

$$\text{Alors } z' \times x'^{k'} = z \times x \times (x^2)^{\frac{k-1}{2}} = z \times x \times x^{k-1} = z \times x^k = b^n$$

Dans tous les cas, on obtient bien $z' \times x'^{k'} = b^n$.

De plus, comme $k \geq 0$, nécessairement $k' \geq 0$ (quotient de la division de k par 2).

Conclusion : On a donc démontré que la propriété « $z \times x^k = b^n$ et $k \geq 0$ » est un invariant de la boucle.

4. Comme la propriété est un invariant et comme la boucle termine, à la fin de la boucle on a $k=0$ et $z \times x^k = z \times x^0 = b^n$, autrement dit $z = b^n$.