

Réseaux sociaux : Modélisation



Alban, Béatrice, Charles, Déborah, Éric, Fatima, Gérald, Hélène sont inscrits sur un réseau social. Dans ce réseau social, les **relations** sont **symétriques** : une personne n'est en relation (d'amitié) avec une autre que si l'autre accepte également de l'être.

On détient les informations suivantes :

- Alban est ami avec Charles et Hélène ;
- Béatrice est amie avec Déborah et Éric ;
- Charles est ami avec Fatima et Hélène ;
- Déborah est amie avec Éric ;
- Éric est ami avec Fatima ;
- Fatima est amie avec Hélène ;
- Gérald est ami avec Hélène.

1. Sous cette forme, nous est-il facile de répondre aux questions suivantes ?

1. Qui a le plus grand nombre d'amis ? Qui en a le moins ?
2. Est-ce que deux personnes quelconques ont toujours au moins un ami en commun ?
Si non, donner un contre-exemple, c'est à dire deux personnes qui n'ont pas d'ami en commun.
3. Deux personnes quelconques peuvent-elles entrer en contact par le biais des relations amicales (en passant d'ami en ami) ? Si non, donner un contre-exemple.

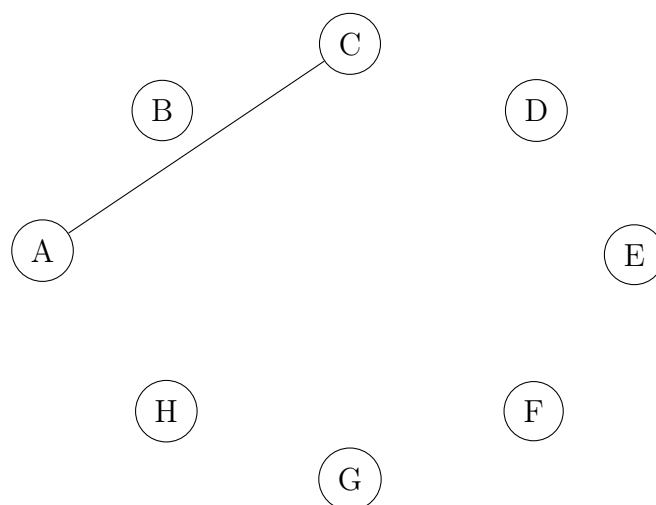
Remarquons qu'il n'y a que 10 inscrits auxquels on s'intéresse ici.

Sur Facebook, par exemple, il y avait presque 3 milliards d'utilisateurs actifs mensuels en avril 2023 (il y a un peu plus de 8 milliards d'habitants sur la planète).

Pour mieux voir, on peut faire un schéma, que l'on appelle un **graphe** :

- On représente chaque personne par la première lettre de son prénom. On obtient ce que l'on appelle les **sommets** du graphe.
- On représente les relations d'amitiés par une ligne, appelée **arête**, reliant les sommets.

Voici ci-dessous l'ensemble des sommets, avec une première arête (symbolisant la relation d'amitié entre Alban et Charles) :



2. Compléter le graphe avec toutes les relations d'amitié données plus haut.
3. Répondre maintenant aux trois questions posées précédemment.

La **distance** entre deux sommets est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut parcourir pour aller d'un sommet à un autre.

4. Remplir le tableau suivant avec la distance entre chacun des sommets du graphe :

distances	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0							
B		0						
C			0					
D				0				
E					0			
F						0		
G							0	
H								0

On remarque que le tableau possède une symétrie (par rapport à la diagonale qui était déjà donnée). Cela vient du fait que la relation étudiée est symétrique.

L'**écartement** d'un sommet est la distance maximale entre ce sommet et les autres sommets du graphe.

5. Remplir la ligne suivante, suite du tableau précédent :

écartement								
------------	--	--	--	--	--	--	--	--

Le **diamètre** d'un graphe est la distance maximale entre deux sommets de ce graphe, autrement dit l'écartement maximal.

6. Quel est le diamètre du graphe précédent ?

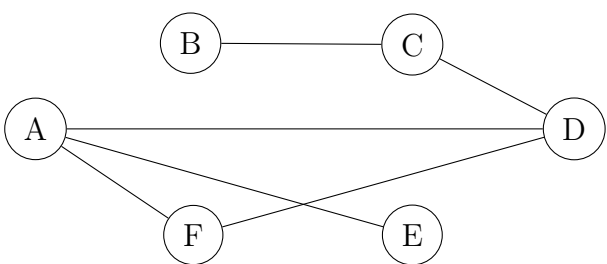
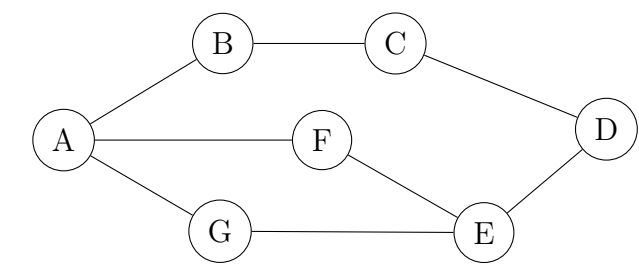
Le **rayon** d'un graphe est le plus petit écartement.

7. Quel est le rayon du graphe ?

Le **centre** d'un graphe est l'ensemble des sommets qui ont le plus petit écartement. Autrement dit, c'est l'ensemble des sommets dont l'écartement est égal au rayon (il peut y en avoir plusieurs).

8. Quel est le centre du graphe ?

9. Pour chacun des deux graphes ci-dessous, après avoir réalisé le même tableau que précédemment (celui des distances, complété par la ligne des écartements), déterminer son diamètre, son rayon puis son centre.



À noter : Plusieurs réseaux sociaux fonctionnent avec des relations **asymétriques**, c'est-à-dire qu'une personne peut avoir une relation avec une autre sans que cela soit réciproque. C'est le cas par exemple de la relation de type « follower » que l'on trouve dans des réseaux comme Instagram ou Youtube. On utilise alors des **graphes orientés** pour les modéliser. Les arêtes deviennent des arcs ; autrement dit, on met une flèche pour indiquer le sens de la relation.