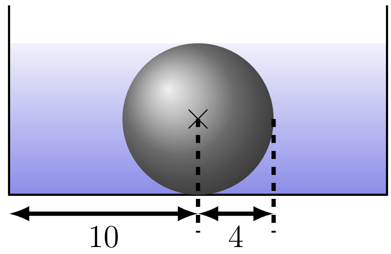
Devoir maison n°2
Un seul exercice est à choisir parmi les deux

Exercice 1 (Bille recouverte)



Dans un récipient cylindrique de rayon 10 cm, on place une bille de rayon 4 cm.
On verse ensuite de l'eau jusqu'à recouvrir exactement la bille.
Puis on retire la bille et on la remplace par une autre de rayon R (différent de 4).
On souhaite pouvoir répondre à la question suivante :
Est-il possible que l'eau recouvre exactement cette nouvelle bille ?

1. (a) Calculer le volume d'eau versé dans le récipient.
   Voici ci-dessous les formules de volumes nécessaires :
   Cylindre de rayon r et de hauteur h : $\pi r^2 h$ Boule de rayon R : $\frac{4}{3}\pi R^3$
   (b) En calculant de deux manières différentes le volume « eau + bille », démontrer qu'une bille est solution du problème si son rayon x vérifie l'équation : $x^3 - 150x + 536 = 0$.
   Pour la suite, on appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 150x + 536$.
2. (a) À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe de f sur l'intervalle $[-14; 10]$.
   (b) Quel est le nombre visible de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-14; 10]$?
3. (a) Toujours à l'aide de la calculatrice, déterminer un intervalle contenant la solution R qui nous intéresse, dont les bornes sont des entiers consécutifs.
   (b) Justifier que, sur cet intervalle, l'équation a une unique solution.
   ⚠ Cette question demande une justification rigoureuse qui nécessite plusieurs étapes de raisonnement.
   (c) Obtenir, encore grâce à la calculatrice, une valeur approchée de R à 10^{-3} près.

Exercice 2 (Modèle SIR)

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans un population, semaine après semaine.
Chaque individu de la population ne peut être que dans l'un des trois états suivants :

état S susceptible d'être atteint par le virus ;

état I infecté par le virus ;

état R rétabli et ne pouvant plus être infecté par le virus.

Un individu est dont dans l'état R lorsqu'il a été vacciné ou lorsqu'il a guéri après avoir été infecté par le virus. Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus à l'état S une semaine donnée, 85% restent à cet état la semaine suivante, 5% deviennent malades et 10% sont rétablis ;
2. Parmi les individus infectés (à l'état I) une semaine donnée, 65% restent malades et 35% sont rétablis :
3. Tout individu rétabli une semaine donnée l'est également la semaine suivante.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n **:** « L'individu est à l'état S en semaine n » ;

I_n **:** « L'individu est à l'état I en semaine n » ;

R_n **:** « l'individu est à l'état R en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont à l'état S, ainsi $\mathbb{P}(S_0) = 1$ et $\mathbb{P}(I_0) = \mathbb{P}(R_0) = 0$.
On note, pour tout entier naturel n, $u_n = \mathbb{P}(S_n)$, $v_n = \mathbb{P}(I_n)$ et $w_n = \mathbb{P}(R_n)$.

Partie A : Évolution au cours des deux premières semaines

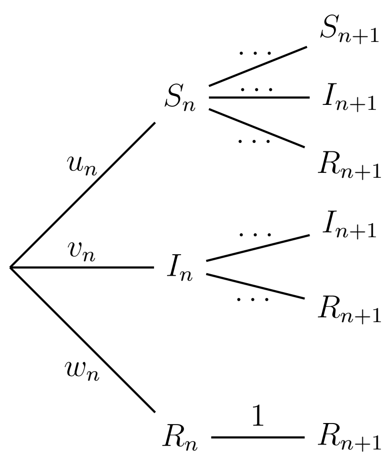
1. Construire un arbre de probabilité modélisant la situation pour les deux premières semaines.
2. Démontrer que $\mathbb{P}(R_2) = 0{,}2025$.
3. Calculer et interpréter $\mathbb{P}_{R_2}(I_1)$. Arrondir au millième.

Partie B : Évolution sur le long terme

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n + v_n + w_n = 1$$

2. (a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



(b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0{,}85u_n$$

$$\text{et } v_{n+1} = 0{,}65v_n + 0{,}05u_n$$

3. Quelle est la nature de la suite u ?
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   On admettra dans la suite que, pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n = 0{,}25(0{,}85^n - 0{,}65^n)$$

4. À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, calculer les termes de ces trois suites pour les 20 premières semaines.
   On admet que les termes de la suite v augmentent puis diminuent à partir d'un certain rang N appelé « pic épidémique ». Le pic épidémique est donc l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
   En utilisant les calculs obtenus précédemment, déterminer le pic épidémique.
   Justifier en donnant les valeurs pertinentes permettant de le montrer.
5. Estimer (à l'aide du tableur ou de la calculatrice) l'évolution de l'épidémie à long terme prévue par ce modèle, au-delà des 20 semaines.