

Devoir surveillé n°2

Correction

Exercice 1

L'expression de f est sous forme d'un quotient, on étudie donc le signe du numérateur et du dénominateur :

- signe de $2x^2 - 2x - 60$: expression polynomiale du second degré.

On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-60) = 4 + 480 = 484 = 4 \times 121 = (2 \times 11)^2 = 22^2 > 0.$$

$$\text{Il y a donc deux racines : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 22}{4} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 22}{4} = 6.$$

- signe de $5x - 3$: expression affine.

On résout :

$$5x - 3 > 0 \Leftrightarrow 5x > 3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{5} \quad (5 > 0)$$



La valeur qui annule le dénominateur est interdite pour la fraction.

On résume le tout dans un tableau :

x	$-\infty$	-5	$\frac{3}{5}$	6	$+\infty$	$a = 2 > 0$	
$2x^2 - 2x - 60$	$+$	0	$-$	$-$	0		$+$
$5x - 3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0		$+$

Exercice 2

1. $g(x) = (3x - 4)e^{-x}$ donc g est de la forme uv avec $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = e^{-x}$.

Alors $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -e^{-x}$ (forme e^w avec $w(x) = -x$, donc $w'(x) = -1$ et $v' = w'e^w$).

Or $g' = (uv)' = u'v + uv'$ donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3e^{-x} + (3x - 4) \times (-e^{-x}) \\ &= (3 + (3x - 4) \times (-1))e^{-x} && \text{(factorisation par l'exponentielle)} \\ &= (3 - 3x + 4)e^{-x} \\ &= (7 - 3x)e^{-x} \end{aligned}$$

2. $e^{-x} > 0$ (exponentielle) et $7 - 3x > 0 \Leftrightarrow 7 > 3x \Leftrightarrow \frac{7}{3} > x \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$. Ainsi :

x	0	$\frac{7}{3}$	4
signe de e^{-x}	+	+	
signe de $7 - 3x$	+	0	−
signe de $g'(x)$	+	0	−
variations de g	−4	0,29	0,15

Exercice 3

On a $h(x) = -2(-x^3 - 12x)^3$, donc h est de la forme $-2u^3$ avec $u(x) = -x^3 - 12x$.

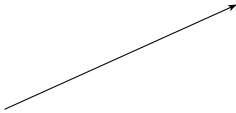
Alors $u'(x) = -3x^2 - 12$ et $h' = (-2u^3)' = -2 \times 3u'u^2$.

Donc $h'(x) = -2 \times 3(-3x^2 - 12)(x^3 - 12x)^2 = -6(-3x^2 - 12)(x^3 - 12x)^2$.

Or, $(x^3 - 12x)^2 \geq 0$ (carré) et $-6 < 0$.

Pour le signe de $-3x^2 - 12 = -3(x^2 + 4)$: $-3 < 0$ et $x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 4 > 0$ (sinon, on le voit comme du second degré, avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = 4$, et $\Delta = -16 < 0$, donc toujours du signe de $a = 1 > 0$).

Par conséquent :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de -6	—	
signe de $-3x^2 - 12$	—	
signe de $(x^3 - 12x)^2$	+	
signe de $h'(x)$	+	
variations de h		

Remarque En fait l'expression de h peut se simplifier ($(-1)^3 = -1$) :

$$h(x) = -2(-x^3 - 12x)^3 = -2 \times (-1)^3 \times (x^3 + 12x)^3 = 2 \times (x^3 + 12x)^3.$$

La dérivée est $h'(x) = 6(3x^2 + 12)(x^3 + 12x)^2 = 18(x^2 + 4)(x^3 + 12x)^2$ où tout est uniquement positif.