

Devoir surveillé n°3

Correction

Exercice 1

1. On a $f(x) = \frac{192}{625} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^2 + \frac{33}{2}x - \frac{37}{8} \right)$.

La fonction f est de la forme ku avec $k = \frac{192}{625}$ et $u(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{4}x^2 + \frac{33}{2}x - \frac{37}{8}$.

Alors $f' = ku'$, avec $u'(x) = x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{33}{2}$.

Autrement dit, $f'(x) = \frac{192}{625} \left(x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{33}{2} \right)$.

Comme $\frac{192}{625} > 0$, le signe de f' est celui de u' , qui est polynomiale de degré 2.

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{17}{2} \right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{33}{2} = \frac{289}{4} - 66 = \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2} \right)^2 > 0$

Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{17}{2} - \frac{5}{2}}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6 = \frac{6}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{17}{2} + \frac{5}{2}}{2 \times 1} = \frac{22}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

De plus, $a = 1 > 0$, donc on obtient :

x	1	3	5,5	8	
signe de f'	+	0	-	0	+
variations de f	$\frac{1528}{625} \simeq 2.44$	4,8	4	8	

2. D'après le tableau de variations :

- Sur $[1 ; 5,5]$, le maximum de f est 4,8, donc $f(x) \leq 4,8 < 5$.

L'équation $f(x) = 5$ n'a donc aucune solution sur cet intervalle.

- Sur $[5,5 ; 8]$:

* f est continue, car dérivable ;

* f est strictement croissante ;

* 5 est compris entre $f(5,5) = 4$ et $f(8) = 8$.

Donc, d'après le TVI, l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution α sur $[5,5 ; 8]$

Globalement, l'équation $f(x) = 5$ a une unique solution sur $[1 ; 8]$, à savoir α .

3. D'après la calculatrice, $\alpha \simeq 6,879754$, donc un encadrement au millièm de α est :

$$6,879 < \alpha < 6,880$$