Devoir surveillé n°6
Correction

Exercice 1

1. Les coordonnées du point moyen G sont :
   - $\overline{x} = \dfrac{2\,000 + 3\,000 + \cdots + 9\,000}{8} = 5\,500$;
   - $\overline{y} = \dfrac{170 + 145 + \cdots + 25}{8} = 90$.

   Autrement dit, $G(5\,500; 90)$.

   Cela signifie que pour un prix moyen en cabine de type Royal de 5 500€, le nombre moyen de clients intéressés serait de 90.
2. D'après la calculatrice, le coefficient de corrélation r vaut environ $-0{,}992$. Sa valeur absolue est très proche de 1, donc un ajustement affine (par la droite des moindres carrés) est tout à fait envisageable.
3. Grâce à la calculatrice, on obtient cette équation pour la droite des moindres carrés (à 10^{-3} près) : $y = -0{,}021x + 204{,}191$.
4. On nous donne une valeur de y (100) et on cherche la valeur x qui correspond.

   Autrement dit on doit résoudre :

   $$\begin{aligned} 100 \leqslant -0{,}021x + 204{,}191 &\Leftrightarrow 0{,}021x \leqslant 104{,}191 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \frac{104{,}191}{0{,}021} \end{aligned}$$

   On obtient $x \simeq 4\,961{,}48$ (arrondi au centime).

   Remarque : avec la calculatrice (avec les arrondis plus précis), on obtient $x \simeq 5\,018{,}35$.

   Cela fait tout de même une différence de plus de 50€.

   Cependant les données statistiques indiquent que pour un prix de 5 000, le nombre de clients serait inférieur à 100 (en fait il s'agit d'un point situé en-dessous de la droite d'ajustement).
5. **Bonus**
   (a) On a tout simplement $R(x) = y \times x = (-0{,}021x + 204{,}191) \times x = -0{,}021x^2 + 204{,}191x$.

   (b) Cette fonction est polynomiale du second degré, avec un coefficient $a = -0{,}021 < 0$, donc sa courbe représentative est une parabole avec les branches tournées vers le bas.

   Son maximum est atteint en $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{204{,}191}{0{,}042} \simeq 4\,861{,}69$ (au centime près).

   (Si on ne se rappelle plus de la formule, on calcule $R'(x)$, dont on étudie le signe, et on va trouver la même chose)

   Le revenu est alors $R(4\,861{,}69) = 496\,356{,}72$€.

   (c) On réutilise le modèle, on calcule y pour $x = 4\,861{,}69$:

   $y = -0{,}021 \times 4\,861{,}69 + 204{,}191 \simeq 102$ réservations.

   (d) On calcule tout simplement : $\dfrac{496\,356{,}72}{100} \simeq 4\,963{,}57$€.

   On n'est pas très loin du prix permettant de maximiser le nombre de cabines réservées (déterminée en 4).

Exercice 2

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \dfrac{2}{n} = 2$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -5+2\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{5}{3}>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$.

3. $w_n = -2n^2+15n+3 = n^2\left(-2+\dfrac{15}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)$.

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2+\dfrac{15}{n}+\dfrac{3}{n^2} = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

4. $s_n = \dfrac{5n-3}{2n^3+5n^2+1} = \dfrac{n\left(5-\dfrac{3}{n}\right)}{n^3\left(2+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n^2}\times\dfrac{5-\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\dfrac{3}{n}=5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}=2$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$

5. On a :

$$\begin{aligned}
-1\leqslant \sin(n)\leqslant 1 &\Leftrightarrow -2\leqslant 2\sin(n)\leqslant 2\\
&\Leftrightarrow 1\leqslant 2\sin(n)+3\leqslant 5\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\leqslant\frac{2\sin(n)+3}{n+1}\leqslant\frac{5}{n+1}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\leqslant t_n\leqslant\frac{5}{n+1}
\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.