Modèles fonctionnels

Exercice 1 (Dérivation – révision de première)
Dans chaque cas, dériver la fonction f.

1. $f(x) = 3x - 2$
2. $f(x) = -x^2 + 5x + 256$
3. $f(t) = 3t^2 - t - 2$
4. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{6} + x - 4$
5. $f(x) = -\dfrac{3x^4}{5} + \dfrac{3x^2}{4} + 1$
6. $f(x) = \dfrac{3}{x}$
7. $f(t) = 2\sqrt{t}$
8. $f(x) = \sqrt{x} - x^3 - 3x + \dfrac{4}{x}$
9. $f(x) = x\sqrt{x}$
10. $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$
11. $f(x) = (5x-3)(4x^2+2)$
12. $f(x) = \dfrac{5x-2}{2x+3}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
14. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$

Exercice 2 (Dérivation)
Dans chaque cas, on définit une fonction f sur un ensemble D. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3x^2 + 4\sqrt{x}$ sur $D =]0; +\infty[$.
3. $f(x) = 5\,\mathrm{e}^x - x + 3$ sur $D = \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Dérivation – formules de terminale)
Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction dérivée (sur $D = \mathbb{R}$).

1. $f(x) = (4x+1)^2$
2. $f(x) = (-6x+1)^2$
3. $f(x) = (\mathrm{e}^x + 1)^2$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x)^3$
5. $f(x) = \sqrt{5x+6}$
6. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+x+1}$
7. $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{2x+4}$
8. $f(x) = -4\,\mathrm{e}^{x^2}$

Exercice 4 (Dérivation – mélange)
Dans chaque cas, on définit une fonction f sur un ensemble D. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

1. $f(x) = (2x^3 - 3)^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 4(-4x^2 + 3x + 5)^2$ sur $D = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 2(x-1)^3 + 0{,}5x + 2$ sur $D = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+6}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
5. $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+1}$ sur $D = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-8}$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
7. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $D = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = 4 - 3\,\mathrm{e}^{-0{,}1x+3}$ sur $D = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = \sqrt{5x+10}$ sur $D =]-2; +\infty[$.
10. $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ sur $D = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = (0{,}5x-1)\,\mathrm{e}^{3x+1}$ sur $D = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{2x}}$ sur $D = \mathbb{R}$.

Exercice 5 (Signe)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-3x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Le tableau de signes ci-dessous comporte des erreurs. Les corriger.

x	$-\infty$		$0{,}33$		$+\infty$
e^{-x}			$-$		
$-3x+1$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 6 (Signe)
Obtenir, dans chaque cas, le tableau de signes de la fonction f définie par son expression sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5x^2 - 5x - 10$
2. $f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}8x - 1{,}5$
3. $f(x) = (-3x + 1)(2x + 8)$
4. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ $(x \neq -1)$
5. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x} - 3$
6. $f(x) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 1$

Exercice 7 (Variations)
Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur un intervalle I. Justifier que f est monotone sur I.

1. $f(x) = \sqrt{-3x+9}$ sur $I =]-\infty; 3]$.
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{-5x+2}{2x+4}$ sur $I =]-2; +\infty[$.
5. $f(x) = 10 - 4\,\mathrm{e}^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 8 (Variations)
Soit h la fonction définie sur $I = [-2; 2]$ par $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in I$, $h'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variations de h sur $[-2; 2]$, en précisant les extrema.

Exercice 9 (Variations)
Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur un intervalle I. Construire le tableau de variations de f sur I.

1. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ sur $I = [-3; 6]$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+1}$ sur $I = [-2; 4]$.
3. $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $I = [-5; 5]$.

Exercice 10 (Variations)
Étudier dans chaque cas les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (déjà dérivée dans l'exercice 4).

1. $f(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$
2. $f(x) = (0{,}5x - 1)\,\mathrm{e}^{3x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{2x}}$

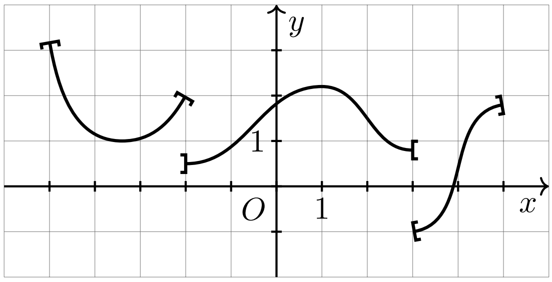
Exercice 11 (Tangente)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+x^2}$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative sur f au point d'abscisse -1.

Exercice 12 (Tangente)
Dans chaque cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. $f(x) = \dfrac{4x+1}{\mathrm{e}^x}$; $a = 0$
2. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$; $a = 1$

Exercice 13 (Continuité)
On considère une fonction f définie sur $[-5;5]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est la suivante :



La fonction est-elle continue :

1. En 3 ?
2. En 1 ?
3. sur $[-3;3]$?
4. sur $]-2;3[$?
5. sur $[-5;2]$?

Exercice 14 (TVI)
On considère une fonction f continue dont on donne ci-dessous le tableau de variations :

x	-10	-5	1	2	4	5
$f(x)$	3 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	1

On pourra répondre aux questions suivantes sans justifier.

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$?
2. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$?
3. Établir le tableau de signes de la fonction f.

Exercice 15 (TVI)
Soit g la fonction définie sur $[-3;6]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x - 8$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-3;6]$.
   Déterminer un encadrement de α au millième près.
3. En déduire le tableau de signes de g sur $[-3;6]$.

Exercice 16 (TVI)
Soit f la fonction définie sur $[-2;2]$ par : $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 2x + 3$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer, en justifiant, le nombre de solution des équations suivantes :

   (a) $f(x) = 3$ (b) $f(x) = 1$ (c) $f(x) = 6$

Exercice 17 (TVI)
Soit f la fonction définie sur $[-2;1]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - 3x + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur $[-2;1]$.
3. Donner une valeur approchée au centième de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Exercice 18 (TVI)
Démontrer que l'équation $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et encadrer celle-ci par deux entiers consécutifs.
Indication : trouver un intervalle $[a;b]$ dans lequel se trouve cette solution, le démontrer, puis démontrer qu'il n'en existe pas au-delà.

Exercice 19 (TVI)

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
L'équation $f(x)=1$ admet-elle des solutions ? Justifier.

Exercice 20 (TVI)

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f.
Déterminer, suivant la valeur du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

x	-5		1		7
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

Exercice 21 (TVI – prix d'équilibre)

Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse, sur une année, 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75€. On estime que les fonctions d'offre f et de demande g sont définies sur $[15;75]$ par :

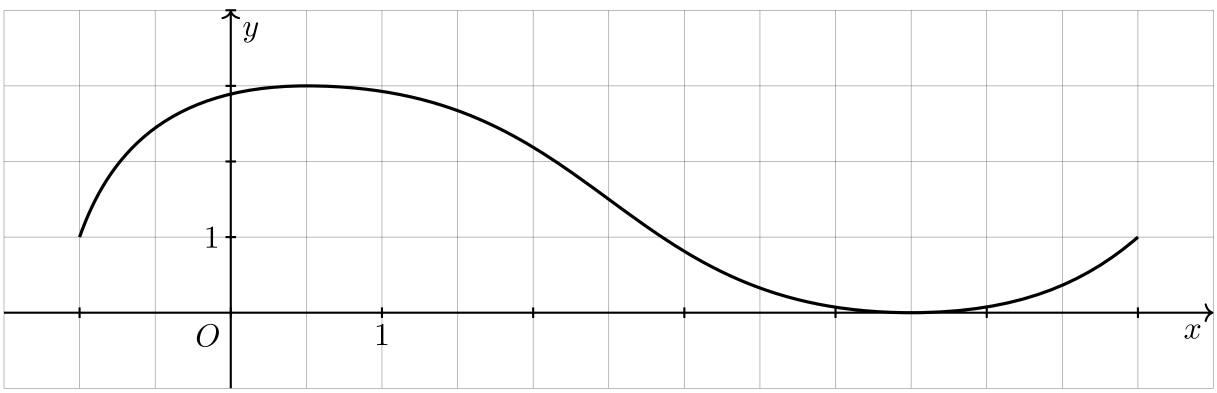
$$f(x)=55{,}8x+1\ 340 \qquad \text{et} \qquad g(x)=-0{,}03x^3+5x^2-300x+8\ 790$$

où x est le prix d'un livre, en euro.
Cela signifie que lorsqu'un livre coûte x euro, l'éditeur est prêt à vendre $f(x)$ livres et les consommateurs sont prêts à acheter $g(x)$ livres.

1. (a) Calculer $f(30)$ et $g(30)$. Interpréter les valeurs obtenues.
   L'offre est-elle supérieure à la demande ?
   (b) Mêmes questions avec $f(50)$ et $g(50)$.
2. Étudier les variations de f sur $[15;75]$. Interpréter.
3. Étudier les variations de g sur $[15{,}75]$. Interpréter.
4. On appelle **prix d'équilibre** le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.
   Après avoir justifié que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution x_0 sur $[15;75]$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_0, arrondie au centime d'euro près.
   Quelles sont alors l'offre et la demande ? Arrondir à l'unité.

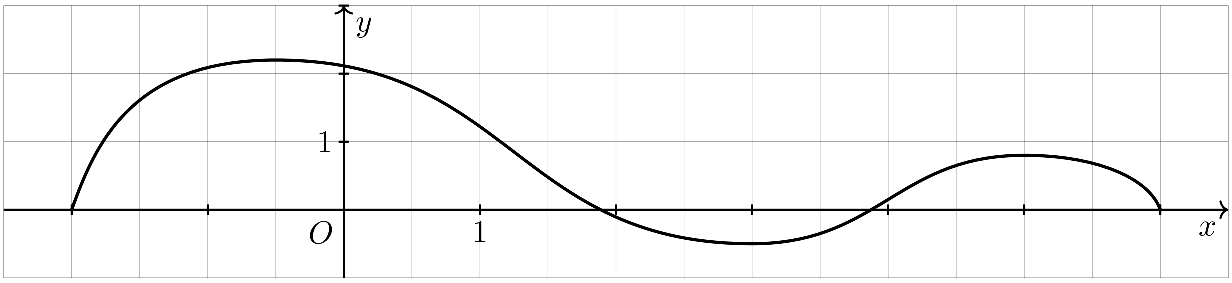
Exercice 22 (Convexité – graphique)

Soit f la fonction dérivable sur $[-1;6]$ dont la courbe représentation $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. Étudier (graphiquement) la convexité de f sur $[-1;6]$.
2. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.

Exercice 23 (Convexité – graphique)
Soit g la fonction dérivable sur $[-2;6]$ dont la courbe représentation $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-dessous.



1. Étudier (graphiquement) la convexité de g sur $[-2;6]$.
2. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion.

Exercice 24 (Convexité – relation avec la dérivée)
Reprendre les deux exercices précédents et indiquer les variations de la fonction dérivée

Exercice 25 (Convexité – relation avec la dérivée)
On considère quatre fonctions dérivables f, g, h et k, dont on donne ci-dessous les tableaux de variations, ainsi que ceux de leurs dérivées.

x	-3	3
$f'(x)$	↗	
$f(x)$	-2 ↗	3

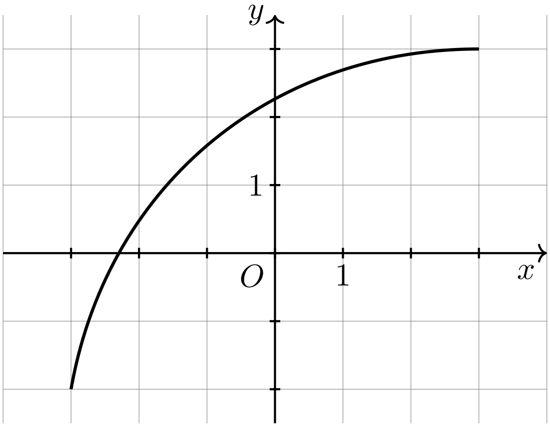
x	-3	3
$g'(x)$	↘	
$g(x)$	-2 ↗	3

x	-3	3
$h'(x)$	↘	
$h(x)$	3 ↘	-2

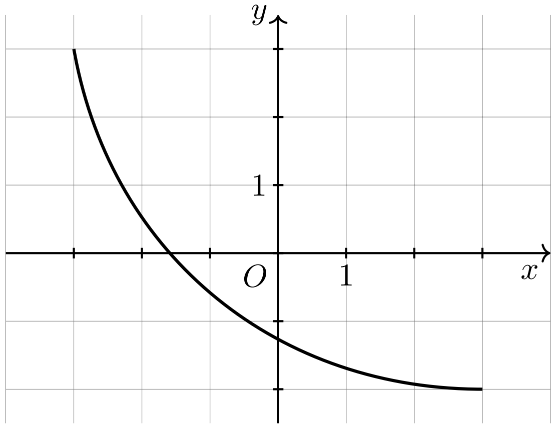
x	-3	3
$k'(x)$	↗	
$k(x)$	3 ↘	-2

1. Leurs courbes sont données ci-dessous. Associer fonctions et courbes, en justifiant.

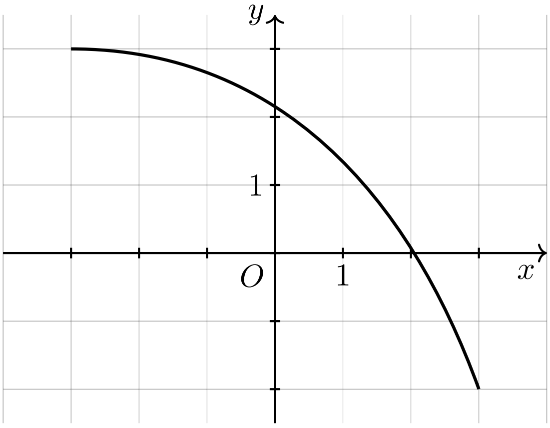
(a)



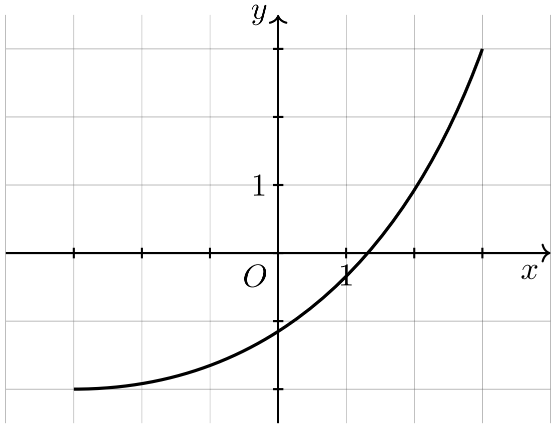
(c)



(b)



(d)



2. Préciser la convexité des fonctions f, g, h et k.

Exercice 26 (Convexité – calculs)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2$.

1. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 (Convexité – calculs)
Soit f la fonction définie sur $[1;5]$ par $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Étudier la convexité de f.

Exercice 28 (Convexité – calculs)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1}$.

1. Déterminer le signe de f
2. Déterminer les variations de f
3. Déterminer la convexité de f.
4. Déterminer le signe de f'
5. Déterminer les variations de f'
6. Déterminer la convexité de f'.

Exercice 29 (Convexité – calculs)
Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1 \quad$ et $\quad g(x) = -0{,}5x^2 - x + 3{,}5$.

1. Étant donné que ces deux fonctions sont polynomiales de degré 2, indiquer l'apparence de leurs courbes représentatives en justifiant.
   Conjecturer alors la convexité de ces deux fonctions.
2. (a) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
   (b) Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$.
   (c) Démontrer alors les conjectures précédentes.

Exercice 30 (Convexité – calculs)
Soit f la fonction définie sur $[-1;8]$ par : $f(x) = \dfrac{5x}{(x+2)^2}$.
On admet les résultats suivants :

$$f'(x) = -5 \times \frac{x-2}{(x+2)^2} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 10 \times \frac{x-4}{(x+2)^4}$$

1. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-1;8]$.
2. Déterminer la convexité de f.
3. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 31 (Convexité – calculs)
Déterminer la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = x^4 - 3x + 2$
2. $f(x) = 10\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 2$
3. $f(x) = -2x^2 + 3$
4. $f(x) = -5\,\mathrm{e}^{3x} + 4$

Exercice 32 (Convexité – calculs)
Déterminer la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$. Préciser leur(s) point(s) d'inflexion.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$
2. $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}x^2$
3. $f(x) = (x-1)^3 + 2$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
6. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$