Modèles fonctionnels
Correction partielle

Exercice 4 (Dérivation – mélange)

1. $f(x) = (2x^3-3)^2$: f est de la forme u^2 avec $u(x) = 2x^3-3$.
   Alors $u'(x) = 6x^2$. Or $(u^2)' = 2u'u$, donc $f'(x) = 2(6x^2)(2x^3-3) = 12x^2(2x^3-3)$.
2. $f(x) = 4(-4x^2+3x+5)^2$: f est de la forme $4u^2$ avec $u(x) = -4x^2+3x+5$.
   Alors $u'(x) = -8x+3$. Or $(4u^2)' = 4\times 2u'u$ donc $f'(x) = 4\times 2(-8x+3)(-4x^2+3x+5) = 8(-8x+3)(-4x^2+3x+5)$.
3. $f(x) = 2(x-1)^3+0{,}5x+2$: f est de la forme $2u^3+v$ avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = 0{,}5x+2$.
   Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 0{,}5$. Or $(2u^3+v)' = 2\times 3u'u^2+v'$, donc
   $f'(x) = 2\times 3\times 1\times (x-1)^2+0{,}5 = 6(x-1)^2+0{,}5$.
4. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+6}$: f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = 3x+6$.
   Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3$. Or $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{2(3x+6)-(2x+1)3}{(3x+6)^2} = \dfrac{6x+12-6x-3}{(3x+6)^2} = \dfrac{9}{(3x+6)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
5. $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+1}$: f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = -2x+1$ et $v(x) = x^2+1$.
   Alors $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 2x$. Or $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{-2(x^2+1)-(-2x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2-2+4x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-2}{(x^2+1)^2}$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-8}$: f est de la forme $\dfrac{u}{v}$...
   $f'(x) = \dfrac{2x(2x-8)-(x^2-3)2}{(2x-8)^2} = \dfrac{2x^2-16x+6}{(2x-8)^2}$
7. $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-x^2}$: f est de la forme $3\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -x^2$.
   Alors $u'(x) = -2x$. Or $(3\,\mathrm{e}^u)' = 3u'\,\mathrm{e}^u$, donc $f'(x) = 3(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = -6x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
8. $f(x) = 4-3\,\mathrm{e}^{-0{,}1x+3}$: f est de la forme $4-3\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -0{,}1x+3$.
   Alors $u'(x) = -0{,}1$. Or $(4-3\,\mathrm{e}^u)' = -3u'\,\mathrm{e}^u$, donc $f'(x) = -3(-0{,}1)\,\mathrm{e}^{-0{,}1x+3} = 0{,}3\,\mathrm{e}^{-0{,}1x+3}$.
9. $f(x) = \sqrt{5x+10}$: f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 5x+10$.
   Alors $u'(x) = 5$. Or $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+10}}$.
10. $f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$: f est de la forme uv avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x}$.
    Alors $u'(x) = 2$. La fonction v est, elle, de la forme e^w avec $w(x) = -0{,}5x$.
    Alors $w'(x) = -0{,}5$. Or $(\mathrm{e}^w)' = w'\,\mathrm{e}^w$, donc $v'(x) = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.
    Par suite, $(uv)' = u'v+uv'$, donc $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + (2x+1)(-0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5x})$.
    On peut factoriser par $\mathrm{e}^{-0{,}5x}$:
    $f'(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x}(2-0{,}5(2x+1)) = \mathrm{e}^{-0{,}5x}(2-x-0{,}5) = \mathrm{e}^{-0{,}5x}(1{,}5-x)$.

11. $f(x) = (0{,}5x - 1)\,\mathrm{e}^{3x+1}$: f est de la forme uv avec $u(x) = 0{,}5x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$.
Alors $u'(x) = 0{,}5$ et v est, elle, de la forme e^w avec $w(x) = 3x + 1$.
Alors $w'(x) = 3$. Or $(\mathrm{e}^w)' = w'\,\mathrm{e}^w$, donc $v'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x+1}$.
Par suite, $(uv)' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = 0{,}5\,\mathrm{e}^{3x+1} + (0{,}5x - 1)(3\,\mathrm{e}^{3x+1})$.
Là encore, on factorise par l'exponentielle :
$f'(x) = \mathrm{e}^{3x+1}(0{,}5 + 1{,}5x - 3) = \mathrm{e}^{3x+1}(1{,}5x - 2{,}5)$.
12. $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{2x}}$: f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$ (forme e^w).
Avec la formule on obtient $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - (x+1)2\,\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x})^2}$.
On peut encore factoriser par l'exponentielle au numérateur et donc ensuite simplifier :
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(1 - 2x - 2)}{(\mathrm{e}^{2x})^2} = \dfrac{-2x - 1}{\mathrm{e}^{2x}}$.

Exercice 20

D'après le tableau de variations, on peut voir que :
- Si $k < -2$, il n'y a aucune solution (-2 est le minimum) ;
- Si $k = -2$, il y a une seule solution ($x = 1$) ;
- Si $-2 < k \leqslant 3$, il y a deux solutions (une dans $[-5; 1]$ et une dans $[1; 7]$) ;
- Si $3 < k \leqslant 5$, il y a une seule solution (dans $[1; 7]$) ;
- Si $k > 5$, il y a aucune solution (5 est le maximum).

Exercice 21

1. (a) $f(30) = 3\,014$ et $g(30) = 3\,480$.
Lorsque le livre coûte 30€ l'éditeur est prêt à vendre 3 014 livres, les consommateurs sont prêts à acheter 3 480.
L'offre est donc inférieure à la demande.
(b) $f(30) = 4\,130$ et $g(30) = 2\,540$.
Lorsque le livre coûte 30€ l'éditeur est prêt à vendre 4 130 livres, les consommateurs sont prêts à acheter 2 540.
La demande est donc inférieure à l'offre.
2. f est affine avec $a = 55{,}8 > 0$, donc f est croissante.
Autrement dit, quand le prix de vente augmente, l'offre augmente.
3. g est polynomiale de degré 3.
$g'(x) = -0{,}09x^2 + 10x - 300$, qui est du second degré.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times (-0{,}09) \times (-300) = 100 - 108 = -8 < 0$ g' n'a donc pas de racine et est du signe de $a = -0{,}09 < 0$.
Ainsi, g est décroissante.
Autrement dit, quand le prix de vente augmente, la demande diminue.
4. On résout :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow 55{,}8x + 1\,300 = -0{,}03x^3 + 5x^2 - 300x + 8\,790 \\ &\Leftrightarrow 0{,}03x^3 - 5x^2 + 355{,}8x - 7\,490 = 0 \qquad \text{(on passe tout à gauche)} \end{aligned}$$

On définit $h(x) = 0{,}03x^3 - 5x^2 + 355{,}8x - 7\,490$ (en fait, $h(x) = f(x) - g(x)$).
$h'(x) = 0{,}09x^2 - 10x + 355{,}8$ est polynomiale de degré 2.
On a $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 0{,}09 \times 355{,}8 = -28{,}088 < 0$ donc il n'y a pas de racine.
Ainsi, h' est toujours du signe de $a = 0{,}09 > 0$ et h est croissante.
Par suite, sur $[15; 75]$:

- h est continue car dérivable ;
- h est strictement croissante ;
- 0 est compris entre $h(15) = -3\,136{,}75$ et $h(75) = 3\,766{,}25$.

Donc d'après le TVI, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_0 sur $[15; 75]$.

D'après la calculatrice, $x_0 \simeq 33{,}615\,89 \simeq 33{,}62$€.

Il s'agit du prix d'équilibre. Pour ce prix, l'offre est égale à la demande.

L'offre et la demande sont donc toutes les deux de $f(x_0) = g(x_0) \simeq 3\,215{,}77$€.

Exercice 32

1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$:

   On a $f'(x) = 3x^2 - 3$ puis $f''(x) = 6x$. Or $6x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.

   Alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		concave		convexe	

   Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 0$.

2. $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}x^2$:

   On a $f'(x) = \mathrm{e}^x - x$ puis $f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

   Or $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.

   Alors :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		concave		convexe	

   Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 0$.

3. $f(x) = (x-1)^3 + 2$

   On a $f = u^3 + 2$ avec $u(x) = x - 1$ et donc $u'(x) = 1$.

   Alors $f'(x) = 3u'u^2$, donc $f'(x) = 3(1)(x-1)^2 = 3(x-1)^2$.

   $f' = 3u^2$, donc $f'' = 3 \times 2u'u = 6u'u$, donc $f''(x) = 6(1)(x-1) = 6(x-1)$.

   Or $6(x-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$.

   Alors :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		concave		convexe	

   Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 1$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2+1$. Donc $u'(x) = 2x$. Or $f' = \dfrac{-u'}{u^2}$, donc $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Par suite, $f' = \dfrac{v}{w}$ avec $v(x) = -2x$ et $w(x) = (x^2+1)^2$.

$v'(x) = -2$.

La fonction w est de la forme u^2, donc $w' = 2u'u$. Ainsi $w'(x) = 2(2x)(x^2+1) = 4x(x^2+1)$.

Or $f'' = \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$, donc

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x)(4x(x^2+1))}{((x^2+1)^2)^2} \\
&= \frac{(x^2+1)(-2(x^2+1)+8x^2)}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{(x^2+1)(6x^2-2)}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{2(x^2+1)(3x^2-1)}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}
\end{aligned}$$

comme x^2 est positif, on a x^2+1 positif, donc $(x^2+1)^3$ positif.

2 est également positif.

Il reste à étudier le signe de $3x^2-1$, qui est polynomiale du second degré.

On trouve (Δ...) deux racines : $x_1 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ et $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Or $a = 3 > 0$, donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		convexe		concave		convexe	

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et un autre d'abscisse $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$: de la forme e^u avec $u(x) = -x^2$, donc $u'(x) = -2x$. Or $f' = u'\,\mathrm{e}^u$.

Donc $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

La fonction f' est de la forme vw avec $v(x) = -2x$ et $w(x) = f(x)$.

Alors $v'(x) = -2$ et $w'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

Par suite, $f'' = v'w + vw'$, donc $f''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2x(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}) = (-2+4x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

L'exponentielle est toujours positive.

Il reste à étudier le signe de $-2+4x^2$, polynomiale du second degré.

On trouve ($\Delta =$...) deux racines : $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Or $a > 0$, donc :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		convexe		concave		convexe	

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et un autre d'abscisse $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$: de la forme uv, dont la dérivée est $u'v + uv'$.
   On a $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   De même pour dériver f' :
   $f''(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$ (attention aux signes).
   Or l'exponentielle est toujours positive, il reste à étudier le signe de $(x-2)$, affine.
   Or : $x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$.
   Donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
f		concave		convexe	

Il y a un point d'inflexion d'abscisse $x = 2$.