

Modèles continus



Exercice 1 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction f .

Donner l'ensemble de définition de f , les limites de f aux bornes de cet ensemble, ainsi que les équations des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Tracer enfin une courbe pouvant représenter la fonction f

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$	4	1
		$-\infty$		

Exercice 2 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)

Faire de même que l'exercice précédent avec les tableaux suivants :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	-2	$+\infty$	3
		$-\infty$	

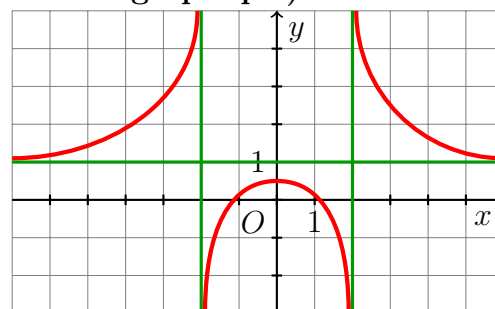
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	-1	$+\infty$	1	3
		$-\infty$		

Exercice 3 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Les droites d'équations $x = -2$, $x = 2$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.

1. Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Tracer le tableau de variations de f .



Exercice 4 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)

Donner, s'il y a lieu, une interprétation graphique pour la courbe $\mathcal{C}_f$ des limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$

Exercice 5 (Limites et asymptotes – lecture ou interprétation graphique)

Compléter les phrases suivantes :

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation est à la courbe $\mathcal{C}_f$ en
2. Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation est à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Si la droite d'équation $y = -5$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$, alors
4. Si la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$, alors

Exercice 6 (Limites et asymptotes – calculs)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = -\frac{2}{x^2} + 3$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$ et en donner l'équation.

Exercice 7 (Limites et asymptotes – calculs)

Déterminer les limites suivantes, si nécessaire à gauche et à droite pour les limites en un réel. Dans chaque cas où il y en a une, donner l'équation de l'asymptote correspondante.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 1 - \frac{1}{x^2}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x - 2x + 1$ | 16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + e^x$ | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2x - 3)$ | 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1}$ |
| 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 1$ | 10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2(x + 2)$ | 18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)(e^x - 1)$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{x^2}$ | 19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 3}{x - 1}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{2 - x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^x$ | 20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^{-0,5x}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 1}{x - 2}$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} + 1 \right) (e^x - 3)$ | 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{1 - x}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100}{1 + 9e^{-0,3x}}$ | 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 3}$ | 22. $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2,8(1 - e^{-0,3t})$ |
| | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x^2} + 1 \right) (x - 1)$ | 23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)(e^{-x} - 1)$ |

Exercice 8 (Limites par comparaison)

Pour chacune des fonctions f vérifiant l'inégalité indiquée, déterminer sa limite en $+\infty$.

- | | |
|---|--|
| 1. Pour tout réel $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ | 3. Pour tout réel $x > 0$, $0 < f(x) < \frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| 2. Pour tout réel x , $f(x) \geq 2e^x - 3$ | 4. Pour tout réel $x \geq 0$, $e^{-2x} \leq f(x) - 1 \leq e^{-x}$ |

Exercice 9 (Limites par comparaison – facultatif)

Le but de cet exercice est de démontrer la limite du cours : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

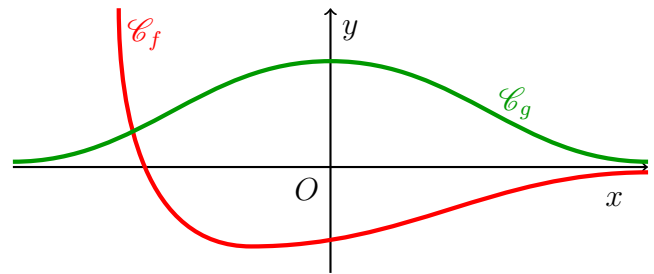
- Étudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
- En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, $e^x > x$ puis la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$.

Exercice 10 (Limites avec formes indéterminées)

Le graphique ci-dessous donne les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

On admet enfin que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

- Donner les autres limites de f et g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Déterminer lorsque cela est possible les limites suivantes :
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - g(x)$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times g(x)$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$



Exercice 11 (Limites avec formes indéterminées)

Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x^2 - 3x - 1$ | 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{2 - x}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x - 1}{2x + 3}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 1}{x - 2}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ | 8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 3}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 1}{x - 2}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{0,5x}}{e^{0,5x} + 1}$ |

Exercice 12 (Primitives)

Dans chaque cas, résoudre l'équation différentielle de la forme $y = f(x)$, ce qui revient à déterminer une primitive de f .

1. $f(x) = -1$

2. $f(x) = 2x + 3$

3. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

4. $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

5. $f(x) = -3e^x + 2$

6. $f(x) = 1 - x + 2e^x$

7. $f(x) = \frac{2}{x^2}$

8. $f(x) = 5x - \frac{3}{x^2}$

9. $f(x) = e^{2x} - 3$

10. $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}} + 2e^{2x} - \frac{1}{2}$

11. $f(x) = -2e^{-2x+1}$

12. $f(x) = e^{3x+1}$

13. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

14. $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$

15. $f(x) = 2(x - e^{-x})(1 + e^{-x})$

Exercice 13 (Primitives)

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f vérifiant la contrainte.

1. $f(x) = x + e^{-x}$ et $F(0) = -1$.

2. $f(x) = 3xe^{-x^2}$ et $F(1) = 0$.

3. $f(x) = 3x^2 e^{x^3} + 1$ et $F(0) = -2$.

4. $f(x) = -xe^{x^2-1}$ et $F(1) = 1$.

5. $f(x) = -2(x+1)(x^2+2x-3)$ et $F(0) = 2$.

Exercice 14 (Primitive et fonction – variation et signe)

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$2 \searrow$	1

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction F est telle que $F(1) = -3$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 1.

Exercice 15 (Primitive et fonction – variation et signe)

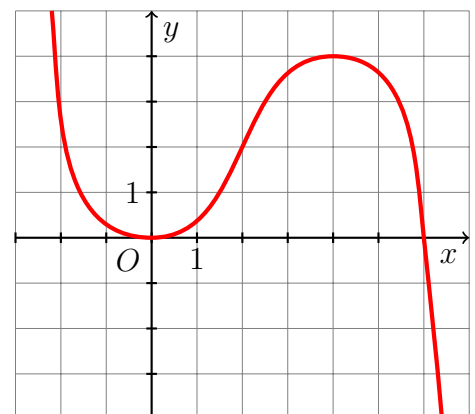
La courbe ci-contre est celle d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les variations de F .

2. En quelles valeurs la courbe de F admet-elle des tangentes horizontales ?

3. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 2 ?



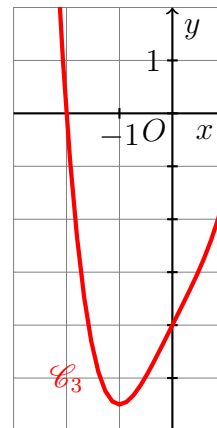
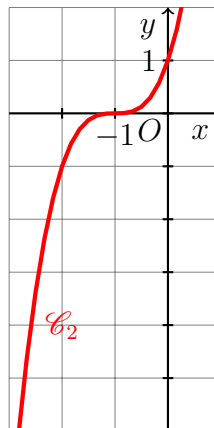
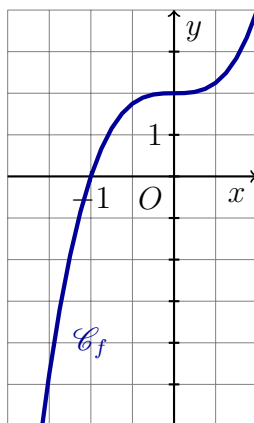
Exercice 16 (Primitive et fonction – variation et signe)

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous à gauche est celle d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Une des trois courbes suivantes représente une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

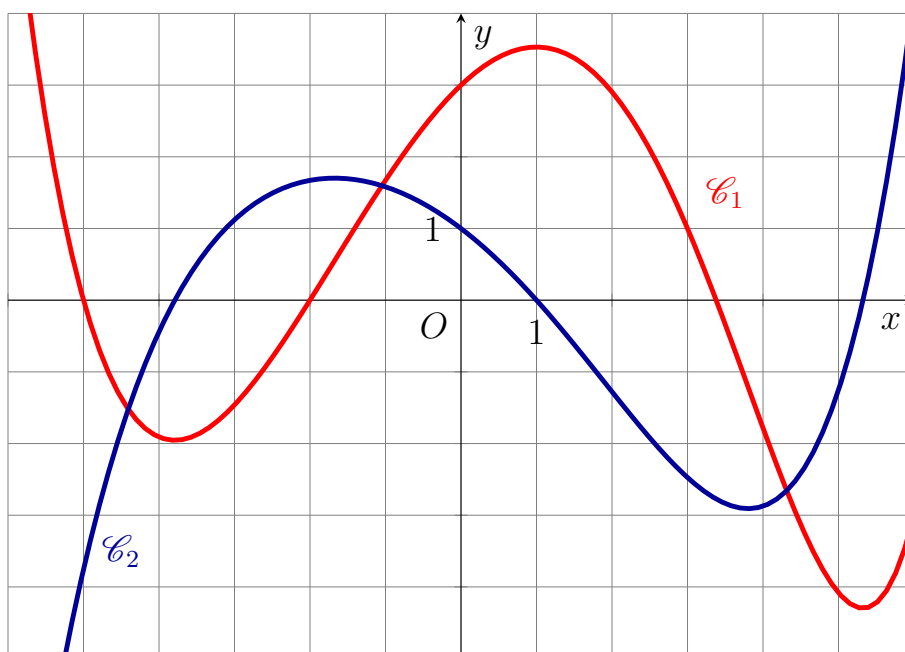
Une autre de ces mêmes trois courbes représente la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer ces deux courbes, en expliquant les choix effectués.



Exercice 17 (Primitive et fonction – variation et signe)

On a représenté ci-dessous les courbes représentatives d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-6; 6]$ et de l'une de ses primitives F . Identifier, en argumentant, la courbe de f et celle de F .



Exercice 18 (Équations différentielles $y' = ay$)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 2y$

3. $4y' + 3y = 0$

5. $2y' - 3y = y' + y$

2. $y' = -y$

4. $-3y + 5y' = 0$

6. $2(y' + 2y) = 3y' + 5y$

Exercice 19 (Équations différentielles $y' = ay$)

Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie la condition donnée.

1. $y' + y = 0$ et $f(0) = 1$.

2. $3y' - y = 0$ et $f(-1) = 3$.

Exercice 20 (Équations différentielles $y' = ay$)

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 3y$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) .

2. À l'aide de la calculatrice, tracer l'allure des solutions de (E) .

On choisira différentes valeurs de k permettant d'obtenir toutes les allures possibles.

3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = -2$.

4. Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(-1; 3)$.

Exercice 21 (Équations différentielles $y' = ay$)

On injecte à un malade une dose de 2 cm^3 d'un médicament. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang par une fonction f , dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifiant, pour tout réel $t \geq 0$:

$$f'(t) = -0,08f(t)$$

où $f(t)$ représente la quantité de médicament présente dans le sang, exprimée en cm^3 , t heures après l'injection.

1. Déterminer l'expression de $f(t)$ en fonction de t .
2. Déterminer, à 10^{-2} près, la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.

Exercice 22 (Équations différentielles $y' = ay - \text{facultatif}$)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

La fonction f vérifie les propriétés suivantes :

- f est solution d'une équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ;
- la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(0; 2)$ passe par le point $B(-3; 1)$.

1. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire la valeur de a .
3. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

Exercice 23 (Équations différentielles $y' = ay + b$)

Résoudre les équations différentielles suivantes (on rappelle qu'il faut commencer par chercher une fonction constante solution) :

1. $y' = -3y + 2$
2. $y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}$
3. $2y' - 3y = 1$
4. $-y' + y - 2 = 0$

Exercice 24 (Équations différentielles $y' = ay + b$)

Résoudre les équations différentielles suivantes puis déterminer la solution f vérifiant la condition indiquée.

1. $y' = 2y - 5$ et $f(0) = 3$
2. $5y' - 3y = 2$ et $f(1) = -1$
3. $y' + 2y = 3$ et $f(0) = -3$
4. $y' - 5y + 10 = 0$ et $f(1) = 0$
5. $2y' + y = -3$ et $f(0) = 2$

Exercice 25 (Équations différentielles $y' = ay + b$)

À l'instant $t = 0$, on place 20 grammes d'une substance soluble dans de l'eau. Pour tout réel $t \geq 0$, on note $f(t)$ la quantité de substance dissoute, exprimée en gramme, au bout de t minutes. On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,14y + 2,8$.

1. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction u définie par $u(t) = \alpha$ soit solution de (E) .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
3. Déterminer, pour tout réel $t \geq 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t .
4. Déterminer, au gramme près, la quantité de substance dissoute au bout de dix minutes.

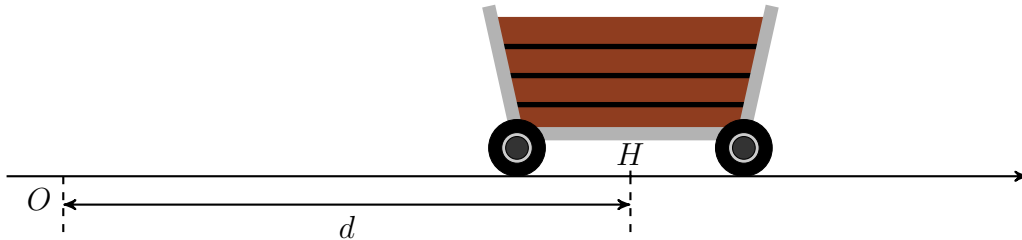
Exercice 26 (Équations différentielles $y' = ay + b$ – facultatif)

La température de refroidissement d'un objet, fabriqué industriellement, est modélisée par une fonction f , où, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t)$ représente la température de l'objet, exprimée en degré Celsius, à l'instant t , exprimé en heures. La fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 10$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. La température initiale de l'objet est 220 °C. Déterminer, pour tout réel $t \geq 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t .
3. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
(b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
(c) Interpréter les résultats précédents dans le contexte de l'exercice.

Exercice 27 (Facultatif)

Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. La position du chariot est repérée par la distance d , en mètre, du point H , au-dessus duquel se trouve le chariot, à l'origine O du repère en fonction du temps t , exprimé en seconde.



Les lois de Newton permettent de montrer que la fonction d vérifie, pour tout réel $t \geq 0$, la relation : $200d''(t) + 25d'(t) = 50$.

1. Pour $t \geq 0$, on note $v(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t . Rappel : pour tout $t \geq 0$, $v(t) = d'(t)$.
Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,125y + 0,25$.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E).
(b) On suppose que $v(0) = 0$. Déterminer, pour tout réel $t \geq 0$, en fonction de t .
(c) Calculer $V = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$. Interpréter cette valeur.
3. (a) Que représente la fonction d pour la fonction v ?
(b) On suppose que $d(0) = 0$. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $d(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}$.
(c) Calculer la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes (à 10^{-2} m près).

Exercice 28 (Facultatif)

Au début d'une épidémie, on constate que 1% de la population est contaminée. Pour $t \in [0; 30]$, on note $f(t)$ la fréquence de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $f(0) = 0,01$. On admet que la fonction f est dérivable et strictement positive sur $[0; 30]$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 0,05y(1 - y)$.

1. Soit la fonction g définie sur $[0; 30]$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
(a) Calculer $g(0)$.
(b) Montrer que g est solution de l'équation différentielle (F) : $y' = -0,05y + 0,05$.
(c) Résoudre (F). En déduire l'expression de $g(t)$ en fonction de t .
2. (a) Montrer que, pour tout réel $t \in [0; 30]$: $f(t) = \frac{1}{99e^{-0,05t} + 1}$.
(b) Calculer, à l'entier près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.