

Temps d'attente

Lois continues



Exercice 1 (Loi géométrique)

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p = 0,25$.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, puis $\mathbb{P}(X = 3)$.
3. Plus généralement, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Donner l'espérance de X .
4. Décrire une expérience aléatoire mettant en jeu la variable aléatoire X .

Exercice 2 (Loi géométrique)

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre 0,3.

1. Calculer les probabilités suivantes :
 $\mathbb{P}(X = 4)$, $\mathbb{P}(X \leq 2)$ et $\mathbb{P}(X > 3)$
Arrondir les résultats au millième.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 3 (Loi géométrique)

On suppose que le temps d'attente (en minute) d'un métro à une station est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi géométrique. Le temps d'attente moyen d'un métro pour une ligne est de 3 minutes.

1. Quel est le paramètre de la loi géométrique pour cette ligne ?
2. Quelle est la probabilité d'attendre entre 1 et 3 minutes une rame de cette ligne ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 5 minutes ?

Exercice 4 (Loi géométrique)

Un veilleur de nuit doit ouvrir une porte dans le noir (il a perdu sa lampe!). Il est équipé d'un trousseau de 10 clés dont une seule ouvre la porte. Soit X la variable aléatoire qui dénombre le nombre de clés essayées jusqu'à ce que la porte s'ouvre. Les clés n'étant pas différenciées, il choisit à chaque essai une clé au hasard parmi les 10.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser son paramètre.
2. Quelle est la probabilité que le veilleur ouvre la porte au premier essai ?
3. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X > 2)$. Interpréter.
4. Calculer $\mathbb{P}_{X>5}(X > 8)$ de deux manières différentes.
Interpréter le résultat obtenu.
5. On considère désormais que le veilleur de nuit teste une clé puis met la clé testée dans sa poche. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte lors du troisième essai ? On pourra s'aider d'un arbre.

Exercice 5 (Loi géométrique)

Marie joue avec des pièces d'un euro, provenant de la collection de son grand-père, réunies dans une grande boîte opaque. Parmi ses 100 pièces, le grand-père a réuni 16 pièces ne provenant pas de France, mais de 16 pays différents de la zone euro. Les pièces sont indiscernables au toucher. Marie choisit une pièce dans la boîte au hasard et avec remise.

- Quelle est la probabilité que Marie tire une pièce avec une face étrangère au premier tirage ?
- On note X la variable aléatoire qui, à l'issue des tirages successifs de Marie, associe le rang d'obtention de la première pièce ayant une face étrangère.
 - Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
 - Quelle est la probabilité que Marie obtienne sa première pièce ayant une face étrangère au 3^e tirage ?
 - Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2)$.
Interpréter ce résultat.
 - Déterminer puis interpréter $\mathbb{P}_{X>3}(X > 5)$.

Exercice 6 (Loi géométrique)

On lance une pièce truquée jusqu'à obtenir Pile. La probabilité d'obtenir Pile est égale à 0,3.

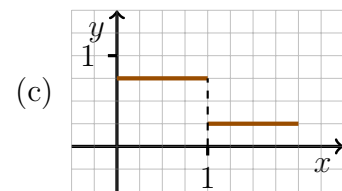
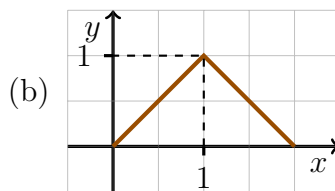
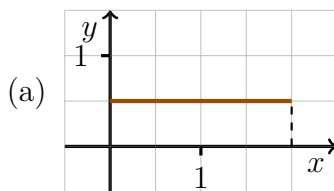
On note la variable aléatoire donnant le rang d'obtention du premier Pile.

Déterminer les entiers $k > 0$ tels que :

$$\mathbb{P}(X = k) \leq 0,01$$

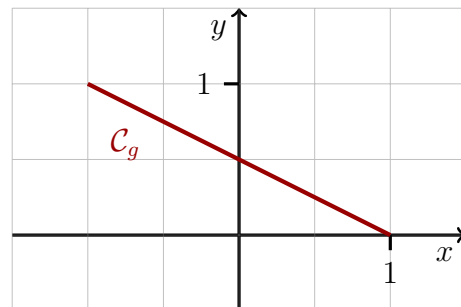
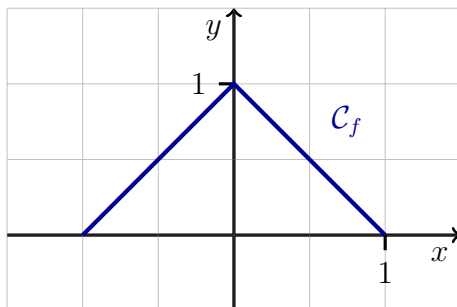
Exercice 7 (Lois continues)

- Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer s'il s'agit d'une densité de probabilité sur l'intervalle $[1; 4]$.
 - $f(x) = \frac{2}{15}x$
 - $g(x) = \frac{1}{21}x^2$
 - $h(x) = 2x - 5$
 - $i(x) = 4x^3$
- Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer s'il s'agit d'une densité de probabilité sur l'intervalle $[0; 2]$.



Exercice 8 (Lois continues)

On a représenté ci-dessous deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-1; 1]$.



- Par des considérations géométriques, justifier que f et g sont des fonctions de densité.
- On note X la variable aléatoire suivant la loi de probabilité de densité f . Calculer les probabilités suivantes :
 - $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 0)$
 - $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 0,5)$
 - $\mathbb{P}(X \geq 0)$
 - $\mathbb{P}(-0,5 \leq X \leq 0,5)$
- Reprendre la question 2 lorsque X suit la loi de probabilité de densité g .

Exercice 9 (Loi uniforme)

On choisit un nombre réel au hasard entre -1 et 5 .

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 2 ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ?
3. Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement inférieur à 2 , sachant qu'il est strictement positif ?

Exercice 10 (Loi uniforme)

On casse au hasard un spaghetti de longueur 25 cm en deux morceaux. On note D la variable aléatoire égale à la longueur du morceau de gauche.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire D ?
2. Donner la fonction densité définissant la loi de D .
3. Quelle est la probabilité que la longueur du morceau de spaghetti obtenu mesure moins de 8 cm ?
4. On sait que la longueur du morceau de spaghetti obtenu mesure plus de 12 cm. Quelle est la probabilité qu'il mesure moins de 20 cm ?

Exercice 11 (Loi uniforme – facultatif)

On considère deux réels tels que $a < b$ et une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[a; b]$.

1. Rappeler la densité de probabilité f associée à X .
2. On rappelle que l'espérance mathématique de X est définie par :

$$E(X) = \int_a^b (x \times f(x)) dx$$

Calculer la valeur de $E(X)$ en fonction de a et b .

3. La variance de X est définie par :

$$V(X) = \int_a^b (x^2 \times f(x)) dx - (E(X))^2$$

Justifier alors que $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Exercice 12 (Loi exponentielle)

On modélise la durée de vie, en heure, d'un transistor par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2,5 \times 10^{-5}$.

1. Préciser la densité f de probabilité de T . Préciser la valeur de $f(0)$ puis l'espérance de T .
Interpréter.
2. Calculer $\mathbb{P}(T \leq 15\,000)$, $\mathbb{P}(T > 50\,000)$ et $\mathbb{P}(10\,000 \leq T \leq 30\,000)$.
Interpréter.

Exercice 13 (Loi exponentielle)

Une usine fabrique des batteries lithium-ion. La probabilité qu'une telle batterie cesse de fonctionner avant 4 années après sa mise en service est égale à $0,565$. On admet que la variable aléatoire T qui, à une batterie lithium-ion prélevée au hasard dans le stock de l'usine, associe sa durée de vie, exprimée en année, suit la loi exponentielle de paramètre λ . Dans cet exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

1. Déterminer la valeur exacte de λ .
2. Pour la suite, on prendra $\lambda = 0,208$.
 - (a) Déterminer la probabilité qu'une batterie lithium-ion soit encore en état de fonctionnement au bout de 8 ans sachant qu'elle fonctionne encore quatre années après sa mise en service.
 - (b) Déterminer la durée de vie moyenne d'une batterie.

- (c) Déterminer le réel t_0 tel que $\mathbb{P}(T > t_0) = 0,75$. On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à l'unité. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 14 (Loi exponentielle)

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heure. On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ , où $\lambda > 0$.

1. On sait que le temps de fonctionnement moyen est égal à 7 heures et 30 minutes. Déterminer la valeur exacte de λ . Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.
2. Montrer que la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est environ égale à 0,513.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (a) Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier.
 - (b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
 - (c) Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).